ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU MERCREDI 24 AVRIL 1946.

PRÉSIDENCE DE M. ÉLIE CARTAN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Les ensembles rangés.*
Note de M. ARNAUD DENJOY.

Dans un Ouvrage sous presse intitulé l'*Énumération transfinie*, j'ai mis en évidence la nécessité de séparer nettement les deux notions, si fâcheusement identifiées entre elles par Cantor, du nombre ordinal indicatif d'un rang et du type de bonne ordination.

Entre le nombre ordinal et le rang il n'y a que la différence du qualificatif à l'objet qualifié. Un type de bonne ordination occupe un rang parmi les autres. Ce rang est repéré par un nombre ordinal. Mais c'est une erreur de confondre le type avec ce nombre ([1]).

A priori la notion de *rang* ne semble pas devoir être réservée aux éléments des ensembles bien ordonnés. Mais, pour pouvoir s'étendre à d'autres modes d'ordination, elle est soumise à trois conditions :

A. *Le rang d'un élément est un caractère ordinal*, en ce sens que si a est un élément de l'ensemble ordonné E, et si a est doué d'un rang dans E, ce rang, s'il existe, se conserve dans toute transformation de E en un ensemble ordonné semblable à lui.

B. *Le rang de l'élément* a *de* E, s'il existe, *ne dépend que de la section commençante de* E, soit $C(a, E)$, *formée par les éléments de* E *non ultérieurs à* a.

Le rang se conserve donc dans tout prolongement ordinal de $C(a, E)$ au delà de a.

Un élément d'un ensemble ordonné E peut en être *le premier*, même si cet élément est dépourvu de conséquent (s'il est ordinalement limite de E, évidemment du côté ultérieur).

([1]) J'ai déjà exprimé la même idée, et j'ai donné l'exemple (voir plus loin) de l'ensemble rangé Q (pour le cas de e vide) dans une Note du 29 septembre 1941 (*Comptes rendus*, **213**, p. 431). Cette fois je donne des détails sur la théorie des ensembles rangés. Celle-ci figurait dès cette époque dans le manuscrit mis en composition peu après, et dont les circonstances et des difficultés majeures ont jusqu'à présent contrarié l'édition.

Si E se compose des entiers 2, 4, 10, 13, 14 et de tous les nombres rationnels supérieurs à 14, E a *un premier, un second, ..., un cinquième* élément, et il n'a *pas de sixième* élément.

Si E est l'ensemble des nombres $1/2, 2/3, \ldots, (n-1)/n, \ldots, 1$ et des nombres rationnels supérieurs à 1. le tout ordonné selon les valeurs croissantes des éléments, Il *possède un* $\omega^{\text{ième}}$ *élément, mais non pas un* $(\omega+1)^{\text{ième}}$.

C. *Le rang d'un élément le caractérise.*

Conséquence. — *Si la notion de rang est applicable aux éléments de l'ensemble ordonné* E, *deux sections commençantes distinctes quelconques de* E *sont dissemblables.*

Nous appelons *ensemble rangé* tout ensemble satisfaisant à cette dernière condition.

Exemple d'ensemble rangé. — Soient P un ensemble parfait linéaire, u_1 ou $a_1 b_1, \ldots,$ u_n ou $a_n b_n, \ldots$ ses intervalles contigus énumérés. Sur u_n plaçons n points auxquels nous ajoutons a_n et b_n; enfin complétons par un ensemble quelconque e de points de seconde espèce de P. L'ensemble total Q ordonné dans le sens des abscisses croissantes est rangé. Il sera dénombrable ou non en même temps que e.

Dans le premier cas, l'ensemble ordonné dénombrable Q a une infinité non dénombrable de sections commençantes toutes dissemblables entre elles.

Soit Γ_0 une famille d'ensembles ordonnés possédant les propriétés suivantes :

1° Tout ensemble E de la famille Γ_0 est rangé.

2° Si l'ensemble E appartient à la famille Γ_0, toute section commençante de E est aussi dans Γ_0.

3° Tout ensemble semblable à un ensemble de Γ_0 est dans Γ_0.

4° Quels que soient les deux ensembles E et E' appartenant à Γ_0, ou bien ils sont semblables, ou bien l'un d'eux est semblable à une section commençante de l'autre.

Les ensembles bien ordonnés forment une famille remplissant les conditions précédentes.

A la famille Γ_0 nous attachons un *ensemble-étalon des rangs* E_0, non nécessairement défini dans sa totalité (par analogie avec la théorie de Cantor, où l'ensemble total des nombres ordinaux n'est pas défini), mais dont toute section commençante est supposée définie, et tel que :

1° Tout ensemble E de Γ_0 est semblable à une section commençante de E_0.

2° Toute section commençante de E_0 appartient à Γ_0.

L'élément ρ de E_0 ayant dans E_0 le même rang que a dans E sera l'*indicatif de ce rang*. Il constitue la généralisation étendant à l'ensemble-étalon E_0 la notion du *nombre ordinal*.

Le lien étroit du rang et du nombre ordinal apparaît ainsi.

Mais, pour donner à la notion de type de bonne ordination l'extension analogue, adjoignons à E_0 l'ensemble $H(E_0)$ *des types de rangement des sections commençantes de* E_0, E_0 lui-même étant exclu.

Alors, tandis que la suite des types de bonne ordination forme un ensemble

bien ordonné semblable à celui des nombres ordinaux cantoriens, en général, *pour un ensemble* E_0 *quelconque*, $H(E_0)$ *lui sera dissemblable.*

Par exemple, si l'ensemble Q considéré plus haut contient P, et si on lui fait jouer le rôle de E_0, $H(E_0)$ ayant une infinité non dénombrable de couples d'éléments consécutifs, n'est pas semblable à un ensemble linéaire, tandis que E_0 l'est.

Voici les propriétés principales du système $[E_0, H(E_0)]$:

1° $H(E_0)$ *est rangé.*

2° $H(E_0)$ *est ordinalement fermé*, c'est-à-dire : si C et D sont deux sections complémentaires, l'une commençante C, l'autre finissante D, de $H(E_0)$, ou bien C a un élément final, ou bien D a un élément initial. Or E_0 peut être rangé sans être fermé.

3° *Si* E_0 *est ordinalement fermé*, $H(E_0)$ *n'a pas d'élément bilatéralement limite.*

Or E_0 peut être ordinalement fermé et posséder des éléments de cette dernière sorte.

4° *Pour que* E_0 *soit ordinalement semblable à* $H(E_0)$, *il faut et il suffit que :*

a. E_0 *soit ordinalement fermé;*

b. Tout élément de E_0 *non final et ultérieur à une infinité d'éléments de* E_0 *ait un conséquent.*

Soient $\hat{\delta}_m$ une suite de nombres ordinaux de Cantor, croissant quand leur indice négatif m décroît, $\hat{\delta}$ la limite des $\hat{\delta}_m$, γ un nombre ordinal non inférieur à $\hat{\delta}$, τ_α ou $\tau(\alpha)$ le α^e type de bonne ordination, p, p_m des entiers non négatifs.

Le type le plus général $T(E_0)$ *des ensembles rangés* E_0 *semblables à l'ensemble* $H(E_0)$ *des types de leurs sections commençantes est*

$$T(E_0) = \tau_p + \sum_{m=-\infty}^{m=-1} \tau(\omega^{\hat{\delta}_m}) \times p_m + \tau(O_1),$$

O_1 *étant soit la suite* O *des nombres ordinaux finis et transfinis de tout ordre, soit le segment* $S(\gamma, O)$ *de* γ *dans cette suite.*

Tel est le seul cas où la déplorable confusion, admise par Cantor, du nombre ordinal et du type de bonne ordination, serait possible. Les ensembles bien ordonnés correspondent aux conditions particulières $0 = p = p_m$, quel que soit $m < 0$.

CORRESPONDANCE.

M. **Torsten Carleman**, élu Correspondant pour la Section de Géométrie, adresse des remercîments à l'Académie.

M. le **Ministre de l'Éducation Nationale** invite l'Académie à lui présenter une liste de deux candidats au poste de Directeur de l'Institut de Physique du Globe de Strasbourg.

(Renvoi à la Section d'Astronomie.)

M. **Louis Pineau**, Président de la **Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale**, invite l'Académie à se faire représenter à la Cérémonie qui aura lieu le mardi 7 mai, en l'Hôtel de la Société, en l'honneur de Sadi Carnot.

M. **Élie Cartan** est désigné.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Georges Ray. *Les vins de France*.

2° Dezydery Szymkiewicz. *Observations biométriques*, VI-VII, extrait de *Acta Societatis Botanicorum Poloniae*, vol. XVII, n° 1.

M. **Jean Vignal** prie l'Académie de bien vouloir le compter au nombre des candidats à la place vacante, dans la Section de Géographie et Navigation, par le décès de M. *Robert Bourgeois*.

ALGÈBRE. — *Théorie non-abélienne des corps de classes pour les extensions finies et séparables des corps valués complets : conducteur, théorie de l'irrégularité*. Note [1] de M. **Marc Krasner**, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de ma Note précédente [2]. K/k sera supposée séparable. Soit $\overline{\mathfrak{M}}$ la fermeture sur l'axe semi-réel [3] du module de valuation $\mathfrak{M}$ de K. Si $f=f_{\alpha/k}(x)$, le conducteur [4] de $\mathfrak{U}_\alpha = TC_\alpha$ sera noté $\mathfrak{f}_{K/k}^{(f)}$ et dit le conducteur de K/k *en* f, et le p. g. c. d. [3] des $\mathfrak{f}_{K/k}^{(f)}$, où f parcourt $E_{K/k}$, sera noté $\mathfrak{f}_{K/k}$ et dit le *conducteur* de K/k. On a, si l'on se place dans $\mathcal{E}_k^{(n)}$, $\omega_n(\mathfrak{f}_{K/k}^{(f)}) = \varphi(\Pi_\alpha; v_{m(\alpha)-1})$ et $\omega_n(\mathfrak{f}_{K/k}) = \varphi_{K/k}(v_{m-1})$, où $v_m = +\infty$, formule analogue à celle de Hasse-Artin [5] pour les extensions galoisiennes des corps $\mathfrak{p}$-adiques. L'application T de $\mathfrak{K}$ sur $\mathcal{E}_k$ est partout centrale [3] et ouverte, donc, en vertu du Principe I, $\mathcal{E}_{K/k}^0$ *est localement ouvert en tout* $g \in \mathcal{E}_{K/k}^0$ *séparable et si* $g = f_{\alpha/k} \in \mathcal{E}_{K/k}$, *l'entourage de* g *dans* $\mathcal{E}_{K/k}^0$ *contient* $\mathfrak{U}_\alpha$; ainsi, le conducteur en f et le conducteur de $E_{K/k}^0$ divisent ceux de K/k; la dégénérescence de r vers le type algébriquement fermé peut entraîner l'inégalité $\mathfrak{f}(E_{K/k}^0) \neq \mathfrak{f}_{K/k}$ (toutefois, ceci n'arrive pas si r est un champ de Galois). Mais si k^* est le complété d'une extension transcendante élémentaire [6] $k(t)$ de k de caractéristique valuative [6] (1), si $K^* = k^*(\alpha)$ et si l'on identifie un diviseur [3] de $\mathcal{E}_{k^*}^{(n)}$ avec celui qu'il induit sur $\mathcal{E}_k^{(n)}$, $\mathfrak{f}_{K/k}^{(f)} = \mathfrak{f}^{(f)}(\mathcal{E}_{K^*/k^*}^0)$ et $\mathfrak{f}_{K/k}$ *est égal au conducteur de l'ouverture* [3]

---

[1] Séance du 8 avril 1946.

[2] *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 626; toutefois, j'y avais employé, par erreur, dans les lignes 21 et 32 de la page 627, le mot *similitude* au lieu du mot *quasi-similitude* [3].

[3] Krasner, *Comptes rendus*, **219**, 1944, pp. 433-435.

[4] Krasner, *Comptes rendus*, **222**, 1946, pp. 581-583.

[5] Hasse, *Journ. f. d. reine und ang. Math.*, **162**, 1930, pp. 169-184.

[6] Krasner, *Comptes rendus*, **220**, 1945, pp. 28-30.

$E^{\star}_{K/k}$ *de* $E^{0}_{K/k}$ *dans* $\mathcal{E}^{(n)}_{k^\star}/\mathcal{E}^{0}_{K^\star/k^\star}$, ce qui en est une définition à l'aide des seuls objets dans k. Le Principe III et l'existence de certaines surextensions hilbertiennes (⁷) de K/k montrent que, si $n \mid \nu$, l'ordre dans $\mathcal{E}_{k^\star,\nu}$ du conducteur $\mathfrak{f}^{(\nu)}_{K/k}$ de $E^{\star}_{K/k} \cap E_{k^\star,\nu}$ est le nombre minimal de $\overline{\mathfrak{M}}\, n:\nu$ qui soit $\geqq \omega_n(\mathfrak{f}_{K/k})$; tous les $\omega_n(\mathfrak{f}^{(f)}_{K/k})$ appartenant au module de valuation du corps de Galois K' de K/k, on a $\omega_n(\mathfrak{f}_{K/k}) = \operatorname{Min} \omega_\nu(\mathfrak{f}^{(\nu)}_{K/k})$, et le minimum est atteint si $(K':k) \mid \nu$.

$\mathfrak{f}$ étant un multiple propre de $\mathfrak{f}_{K/k}$, et $(E_{K/k};\, \mathfrak{f})$ étant la réunion des classes $(\operatorname{mod} \mathfrak{f})$ dans $\mathcal{E}_{k,n}$ contenues dans $E_{K/k}$, $E(\mathfrak{f}, K/k) = (E_{K/k};\, \mathfrak{f})/\mathfrak{f}$ est un ensemble de l'espace ultramétrique *discret* $\mathcal{E}_{k,n}/\mathfrak{f}$, caractérisant K/k à l'isomorphie près. Si k est discrètement valué, et si $\mathfrak{f}$ est le p. p. m. propre de $\mathfrak{f}_{K/k}$, on a $(E_{K/k};\, \mathfrak{f}) = \overline{E}_{K/k}$ et $E(\mathfrak{f}, K/k)$ sera noté $E(K/k)$. Si k est localement compact, $E(K/k)$ est un ensemble *fini*, et un calcul rationnel *fini* suffit à décider si $A \subseteq \mathcal{E}_{k,n}/\mathfrak{f}$ donné est de la forme $E(K/k)$.

Si $\sigma \in G_{K/k}$, la borne inf. sur l'axe semi-réel $\eta^{(\alpha)}_{K}(\sigma)\ (\geqq v^{(\alpha)}(\sigma))$ de $\sigma\alpha - \beta$, où β parcourt K, est dit le *nombre d'irrégularité de* σ *en* α *dans* K. En vertu du Principe III, *si* $\eta^{(\alpha)}_{K}(\sigma) > v^{(\alpha)}_{q-1}$, K *contient le* $q^{-\text{ième}}$ *corps caractéristique* (⁶) $(\sigma K)^{(\sigma\alpha)}_{q}$ *de* $\sigma K/k$ *en* $\sigma\alpha$, *ce qui équivaut à l'inégalité* $1_K \sigma \subseteq \sigma Z^{(\alpha)}_{q}$, (où 1_K est l'isomorphisme identique de K/k). Soient $\eta^{(\alpha)}_{0,K} < \eta^{(\alpha)}_{1,K} < \ldots < \eta^{(\alpha)}_{\pi,K} = +\infty$, toutes les valeurs prises par $\eta^{(\alpha)}_{K}(\sigma)$, $\sigma \in G_{K/k}$. $\eta^{(\alpha)}_{i,K}$ est dit le $i^{-\text{ième}}$ *nombre d'irrégularité de* K/k *en* α. Un $\sigma \in G_{K/k}$ est dit *régulier*, *irrégulier caché*, *irrégulier apparent* ou *irrégulier masqué en* α suivant que $\eta^{(\alpha)}_{K}(\sigma)$ est $+\infty$, fini et égal à $v^{(\alpha)}(\sigma)$, fini, réel et $> v^{(\alpha)}(\sigma)$, fini et non réel. σ est régulier si, et seulement s'il est un automorphisme de K/k, et le nombre de tels σ est $(K:K_g)$, où K_g est le corps maximal entre k et K par rapport auquel K est galoisien. K/k est dite *à irrégularité masquée en* α si tout $\sigma \in G_{K/k}$ est régulier ou irrégulier masqué. L'ensemble $H^{(\alpha)}_{i,K/k}$ des $\sigma \in G_{K/k}$ tels que $\eta^{(\alpha)}_{K}(\sigma) \geqq \eta^{(\alpha)}_{i,K}$ est dit le $i^{-\text{ième}}$ *ensemble d'irrégularité de* K/k *en* α. $\eta^{(\alpha)}_{K}(\sigma)$ étant réel, soit $\mathcal{J}^{(\alpha)}_{\sigma}$ le squelette (⁸) de l'ensemble des $\gamma \in \sigma\alpha + K$ d'ordre $\eta = \eta^{(\alpha)}_{K}(\sigma)$ [c'est l'ensemble $\mathcal{J}(\sigma\alpha)$ de ma Note précédente (⁹) si l'on y pose $F(x) = f_{\alpha/k}(x)$; c'est un ensemble d'un seul élément ou une classe $(\operatorname{mod} \theta_\eta R)$ dans le squelette $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{K}$, où $\theta_\eta \in S$ et $-\operatorname{Log}|\theta_\eta| = \eta$, suivant que $\eta \notin$ ou $\in \mathfrak{M}$]. Soient $B^{(\alpha)}_{q}$ le squelette de l'ensemble (⁹) des $\sigma\alpha - \alpha$, $\sigma \in Z^{(\alpha)}_{q}$, et $x^{(\alpha)}_{q}$ le nombre d'éléments de $B^{(\alpha)}_{q} \cap S$. Si $\eta^{(\alpha)}_{i} = v^{(\alpha)}_{q}$ et si $\sigma \in H^{(\alpha)}_{i} - H^{(\alpha)}_{i+1}$, on montre que $H^{(\alpha)}_{i}$ contient $\sigma(Z^{(\alpha)}_{q} \cap H^{(\alpha)}_{i})$. $\mathcal{J}^{(\alpha)\star}_{\sigma'}$ étant la réunion des $\mathcal{J}^{(\alpha)}_{\sigma}$, $\sigma' \in \sigma(Z^{(\alpha)}_{q} \cap H^{(\alpha)}_{i})$, ou $\mathcal{J}^{(\alpha)}_{\sigma}$ suivant que $\eta^{(\alpha)}_{i}$ réel est ou n'est pas un $v^{(\alpha)}_{q}$, soient $h^{(\alpha)'}_{i}$ le nombre des $\mathcal{J}^{\star}_{\sigma}$, $\sigma \in H^{(\alpha)}_{i} - H^{(\alpha)}_{i+1}$, distincts, augmenté d'une unité, sauf si à la fois $\eta^{(\alpha)}_{i}$ est un $v^{(\alpha)}_{q}$ et $x^{(\alpha)}_{q} \neq 1$, et $h^{(\alpha)''}_{i}$ le nombre $n^{(\alpha)}_{q} : x^{(\alpha)}_{q}$. Les produits $h^{(\alpha)'}$ (ou $h^{(\alpha)''}$) des $h^{(\alpha)'}_{i}$ (ou $h^{(\alpha)''}_{i}$) sont dits les *indices d'irrégularité apparente* et *cachée de* K/k *en* α, et $h^{(\alpha)} = h^{(\alpha)'} h^{(\alpha)''}$ est dit l'*indice d'irrégularité de* K/k *en* α. $h^{(\alpha)} = 1$ *si, et seulement si* K/k *est à irrégularité*

(⁷) KRASNER, *Comptes rendus*, 220, 1945, pp. 761-763.

(⁸) KRASNER, *Comptes rendus*, 219, 1944, pp. 345-347.

(⁹) KRASNER, *Comptes rendus*, 222, 1946, pp. 363-365.

masquée. Une théorie intrinsèque d'irrégularité peut se construire sur le modèle de la théorie intrinsèque de la ramification, et les ensembles d'irrégularité intrinsèques de K/k sont des sous-hypergroupes de $G_{K/k}$. Si k est discrètement valué, aucun σ n'est irrégulier masqué et il existe un $\alpha \in K$, tel que $h^{(\alpha)} = (K_g : k)$.

Soit $Z_q^{(\alpha)}/Z_{q+1}^{(\alpha)} = \{C_{q1}, C_{q2}, C_{q3}, \ldots, C_{qn_q}\}$, où $n_q = n_q^{(\alpha)}$, et soit $\sigma_{qj} \in C_{qj}$. Soient les $t_{qj}(q=0, 1, \ldots, m(\alpha)-1 ; j=1, 2, 3, 4, \ldots, n_q) n_0 + n_1 + \ldots + n_{m(\alpha)-1}$ transcendantes, algébriquement indépendantes par rapport à k, et soit $\mathfrak{K}^{(\alpha)}$ le complété de l'extension transcendante élémentaire ([6]) $\mathfrak{K}(t_{qj} - \sigma_{qj}\alpha ; u_{qj})$, obtenue par l'adjonction de tous les t_{qj}, où la valuation u_{qj} de $t_{qj} - \sigma_{qj}\alpha$ est $r_q^{(\alpha)} = \operatorname{Exp}(-\varphi_q^{(\alpha)})$. $\mathfrak{K}^{(\alpha)}$ ne dépend pas du choix des $\sigma_{qj} \in C_{qj}$. Soit $k^{(\alpha)}$ le complété du sous-corps de $\mathfrak{K}^{(\alpha)}$ obtenu en adjoignant à k les coefficients de tous les polynomes $\theta_q(x) = \Pi(x - t_{qj}) (j = 1, 2, \ldots, n_q)$; aucun polynome de S_k ne s'y décompose. Soit $K^{(\alpha)}$ le composé de $k^{(\alpha)}$ et de K. En vertu du Principe III, pour tout $\sigma \in C_{qj}$, on a $k^{(\alpha)}(t_{qj}) \supseteq (\sigma K^{(\alpha)})_q^{(\sigma\alpha)}$, d'où, puisque $((\sigma K^{(\alpha)})_q^{(\sigma\alpha)} : k^{(\alpha)}) = n_q$ égal à $(k^{(\alpha)}(t_{qj}) : k^{(\alpha)})$, $k^{(\alpha)}(t_{qj})$ est égal à $(\sigma K^{(\alpha)})_q^{(\sigma\alpha)}$. Or, si $1_K \sigma \subseteq \sigma Z_q^{(\alpha)}$, on a $K^{(\alpha)} \supseteq (\sigma K^{(\alpha)})_q^{(\sigma\alpha)}$, d'où $\eta_{K^{(\alpha)}}^{(\alpha)}(\sigma)$ est $\geq \omega(\sigma\alpha - t_{qj}) = \varphi_q^{(\alpha)}$; donc $\eta_{K^{(\alpha)}}^{(\alpha)}(\sigma) = \varphi_{q(\sigma)}^{(\alpha)}$, *où* $q(\sigma)$ *est l'indice maximal tel que* $1_K \sigma \subseteq \sigma Z_q^{(\alpha)}$; ainsi, les $\eta_{K^{(\alpha)}}^{(\alpha)}(\sigma)$ *sont parmi les* $\varphi_q^{(\alpha)}$, donc *sont tous réels ou égaux à* $+\infty$, et $K^{(\alpha)}/k^{(\alpha)}$ *est à l'irrégularité masquée en* α (*son indice d'irrégularité en* α est 1) *si et seulement si* K/k *est galoisienne.*

TOPOLOGIE. — *Espaces uniformes généralisés.* Note ([1]) de M. **Antoine Appert**, présentée par M. Émile Borel.

Nous introduisons des généralisations des espaces uniformes de A. Weil ([2]). Nous en publierons ultérieurement des applications.

Soit P un *espace*, c'est-à-dire un ens. d'éléments appelés *points*. Soit (a, b) le couple ordonné dont le premier élément est un objet a et le deuxième un objet b distinct ou non de a. Soit $P \times P$ l'ens. des couples (a, b) de points de P. On nomme *diagonale* Δ_P de $P \times P$ l'ens. des couples $(a, a) \in P \times P$. Pour tous les sous-ens. E et F de $P \times P$, on pose : $\overset{-1}{E} =$ ens. des couples (b, a) tels que $(a, b) \in E$; $F \circ E =$ ens. des couples (a, c) tels qu'il existe b vérifiant $(a, b) \in E$ et $(b, c) \in F$. Et pour tout $a \in P$, on pose : $E(a) =$ ens. des b tels que $(a, b) \in E$. — Étant donné une famille quelconque $\mathcal{F}$ d'ens., nous disons que $\mathcal{F}$ est *inclusive dans* un ens. H si tout ens. de $\mathcal{F}$ est un sous-ens. de H, et si $[E \in \mathcal{F} \;\&\; E \subset F \subset H] \rightarrow [F \in \mathcal{F}]$. On dit que $\mathcal{F}$ est *semi-multiplicative* si l'intersection de deux ens. de $\mathcal{F}$ contient toujours un ens. de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un *filtre* ([3]) *dans* un ens. H si $\mathcal{F}$ est non vide, ne comprenant pas l'ens. vide, semi-multiplicative et inclusive dans H. Nous disons que deux familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ d'ens. sont *inclusivement équivalentes* si tout ens. de $\mathcal{F}_1$ contient un ens. de $\mathcal{F}_2$ et réciproquement.

Nous appelons *espace topologique généralisé*, ou *espace* $(P, \mathfrak{G})$, le système constitué

([1]) Séance du 1er avril 1946.

([2]) *Sur les espaces à structure uniforme*, Paris, 1937, p. 8.

([3]) H. Cartan, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 595.

par un espace P et par une relation arbitraire $a \mathfrak{T} E$ qui a lieu ou non pour tout point $a \in P$ et tout ens. $E \subset P$. Cette relation $a \mathfrak{T} E$ est désignée par $\mathfrak{T}$, elle est appelée *topologie généralisée* dans P ou *relation de contiguïté* dans P, et elle s'énonce : *a contigu à* E. Dans un espace $(P, \mathfrak{T})$, on appelle *fermeture* $\overline{E}$ d'un ens. $E \subset P$, l'ens. des points de P qui sont contigus à E. On dit qu'un ens. $E \subset P$ est un *entourage* d'un point $a \in P$, si a n'est pas contigu à $P - E$. Nous avons établi ([4]) que les *espaces* $(\mathcal{V})$ de M. Fréchet ([5]) sont identiques aux espaces $(P, \mathfrak{T})$ vérifiant les axiomes I, II et III suivants : I. $[a \in E] \rightarrow [a \mathfrak{T} E]$. II. *On n'a jamais* $a \mathfrak{T} o$, o *désignant l'ens. vide*. III. $[a \mathfrak{T} E \ \& \ E \subset F] \rightarrow [a \mathfrak{T} F]$. — Les axiomes T_3 et C ont été définis dans une Note précédente ([6]). Pour les axiomes α et 2° de F. Riesz ([7]) et pour la terminologie des espaces $(\mathcal{V})$, nous renvoyons à notre Livre ([7]).

Nous appelons *famille uniformisante généralisée* dans un espace P une famille arbitraire de sous-ens. de $P \times P$. Nous appelons *espace* $(P, \mathfrak{T}, \mathfrak{U})$ un *espace* $(P, \mathfrak{T})$ auquel on a associé une famille uniformisante généralisée $\mathfrak{U}$ dans P. Soient les axiomes suivants :

u_1. *pour tout point* $a \in P$ *et pour tout ens.* $E \subset P$, *on a* $[a \mathfrak{T} E] \rightleftharpoons$ [*pour tout* $V \in \mathfrak{U}$, *il existe* $b \in E$ *tel que* $(a, b) \in V$];

$u_2^\star$. $\mathfrak{U}$ *est non vide et inclusive dans* $P \times P$;

$u_2^{\star\star}$. $\mathfrak{U}$ *est semi-multiplicative*;

u_2. $\mathfrak{U}$ *est un filtre dans* $P \times P$;

$u_3^\star$. *tout ens. de* $\mathfrak{U}$ *contient* Δ_P;

u_3. *l'intersection de tous les ens. de* $\mathfrak{U}$ *est* Δ_P;

u_4. (*axiome de symétrie*), $[V \in \mathfrak{U}] \rightarrow [\overset{-1}{V} \in \mathfrak{U}]$;

$u_5^\star$. *quel que soit* $V \in \mathfrak{U}$, *il existe* $W \in \mathfrak{U}$ *et* $X \in \mathfrak{U}$ *tels que* $X \circ W \subset V$;

u_5. *quel que soit* $V \in \mathfrak{U}$, *il existe* $W \in \mathfrak{U}$ *tel que* $W \circ W \subset V$;

on a $[u_5^\star \ \& \ u_2^{\star\star}] \rightarrow u_5 \rightarrow u_5^\star$. De plus, $u_2 \rightarrow [P \neq o]$. D'autre part, si $P \neq o$ et si $u_3^\star$ est vérifié, alors $[u_2^\star \ \& \ u_2^{\star\star}] \rightleftharpoons u_2$. Dans tout espace $(P, \mathfrak{T}, \mathfrak{U})$, nous disons que $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ sont *compatibles* si u_1 est vérifié. Nous appelons *espace hypo-uniforme* ou *espace* $(\mathfrak{U})$ tout espace $(P, \mathfrak{T}, \mathfrak{U})$ vérifiant u_1, $u_2^\star$ et $u_3^\star$. Nous appelons *espace faiblement uniforme* tout espace $(\mathfrak{U})$ vérifiant $u_5^\star$. Nous appelons *espace semi-uniforme* tout espace faiblement uniforme vérifiant u_4. Nous appelons *espace quasi-uniforme* tout espace semi-uniforme vérifiant $u_2^{\star\star}$. Et nous appelons *espace uniforme* tout espace quasi-uniforme vérifiant u_3. On peut donner des exemples montrant que ces diverses classes d'espaces sont distinctes.

Il y a identité entre un espace quasi uniforme non vide et un espace $(P, \mathfrak{T}, \mathfrak{U})$ vérifiant u_1, u_2, $u_3^\star$, u_4 et u_5. Donc les espaces quasi-uniformes non vides coïncident avec les espaces appelés *espaces uniformes* par N. Bourbaki ([8]). Enfin les espaces que nous nommons espaces uniformes, coïncident avec les espaces appelés *espaces uniformes* par A. Weil ([1]).

([4]) *Mathematica*, **11**, 1935, pp. 229-246.

([5]) *Comptes rendus*, **165**, 1917, pp. 359-360.

([6]) *Ibid.*, **216**, 1943, pp. 679-681.

([7]) *Propriétés des espaces abstraits*, Paris, 1934, pp. 12, 18 et 101.

([8]) *Topologie générale*, Chap. II, Paris, 1940, p. 92.

Deux espaces sont dits *topologiquement identiques* s'ils ont les mêmes points et la même topologie généralisée. Nous avons démontré les théorèmes suivants :

1. *Pour qu'un espace* (P, $\mathfrak{G}$) *soit topologiquement identique à au moins un espace* ($\mathfrak{U}$), *il faut et il suffit qu'il soit un espace* ($\mathfrak{V}$). *Tout espace* ($\mathfrak{U}$) *est un espace* ($\mathfrak{V}$) *où, pour tout point a, la famille des* V(a) *où* V *parcourt* $\mathfrak{U}$, *est inclusivement équivalente à la famille des entourages de a.*

2. *Pour qu'un espace* (P, $\mathfrak{G}$) *soit topologiquement identique à au moins un espace faiblement uniforme, il faut et il suffit qu'il soit un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant l'axiome suivant :* C^{**}. *Si un point a n'est pas contigu à un ens.* E, *il existe une fonctionnelle semi-continue supérieurement sur tout l'espace, égale à zéro en a, égale à* 1 *en tout point de* E, *et appartenant toujours à l'intervalle* [0, 1].

3. *Pour qu'un espace* (P, $\mathfrak{G}$) *soit topologiquement identique à au moins un espace semi-uniforme, il faut et il suffit qu'il soit un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant l'axiome suivant :* C^{*}. *Si un point a n'est pas contigu à un ensemble* E, *il existe une fonctionnelle à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement sur tout l'espace, égale à* 0 *en a, égale à* 1 *en tout point de* E, *et appartenant toujours à l'intervalle* [0, 1].

4. *Dans tout espace* ($\mathfrak{V}$), *on a* $C \rightarrow C^{*} \rightarrow C^{**} \rightarrow \alpha$, *et* $C^{*} \rightarrow T_3$. *Donc tout espace faiblement uniforme vérifie* α, *et tout espace semi-uniforme vérifie* α *et* T_3.

Un espace ($\mathfrak{V}$) ne vérifie pas toujours la condition suivante : K. *Toute fonctionnelle à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement sur l'espace, est continue sur l'espace.* — L'axiome C^{*} doit donc en général être distingué de C. Mais on a, dans tout expace ($\mathfrak{V}$) et donc aussi dans tout espace ($\mathfrak{U}$) : [2° de F. Riesz] $\rightarrow$ K $\rightarrow$ [$C \rightleftarrows C^{*}$]. De plus, dans tout espace ($\mathfrak{U}$) on a $u_2^{**} \rightarrow$ [2° de F. Riesz].

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle.* Note [1] de M. **Charles Pisot**, présentée par M. Paul Montel.

Nous appellerons *fonction arithmétique* une fonction $f(x)$ prenant des valeurs entières rationnelles pour toutes les valeurs entières rationnelles $x = 0$, 1, ..., n, ..., de la variable. Pour les fonctions arithmétiques *entières* ne croissant pas trop vite, M. G. Pólya [2] a obtenu le résultat suivant : S'il existe un exposant $\gamma < l n 2$ tel que $|f(x)| < e^{\gamma|x|}$ pour tout x de module assez grand, alors $f(x)$ se réduit à un polynome. Ce résultat a été étendu depuis [3],

(1) Séance du 25 mars 1946.

(2) *Rend. Palermo*, 40, 1915, pp. 1-16.

(3) Hardy, *Proc. Cambridge*, 19, 1917, pp. 60-63; Pólya, *Gött. Nachr.*, 1920, pp. 1-10; Carlson, *Math. Zeitschr.*, 11, 1921, pp. 1-23.

en particulier M. A. Selberg ([4]) a montré que, si $\gamma < ln 2 + (1/1500)$, alors $f(x) = P_1(x) + 2^x P_2(x)$, P_1 et P_2 étant deux polynomes. Cette Note se propose de généraliser ces résultats à des fonctions non nécessairement entières.

Conditions A. — Posons $x = re^{i\varphi}$. Nous supposerons qu'il existe un angle $\delta > 0$ et un exposant γ réel, tels que dans l'angle $|\varphi| < \delta$ la fonction $f(x)$ soit analytique et régulière et, pour tout x de module $r > r_0$, vérifie l'inégalité $|f(x)| < e^{\gamma|x|}$.

Les conditions A entraînent l'existence d'une transformée de Laplace de $f(x)$, à savoir $l(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$, régulière à l'extérieur d'un ensemble S contenu dans tous les demi-plans $r \cos(\varphi - \varphi_0) \leqq \gamma$, $|\varphi_0| < \delta$.

Conditions B. — Supposons que les conditions A soient vérifiées avec un angle $\delta \geqq \pi/2$ et que S soit entièrement compris entre deux parallèles à l'axe réel écartées de moins de 2π.

THÉORÈME. — *Soit $f(x)$ une fonction arithmétique vérifiant les conditions* A. *Soit* T *l'ensemble transformé de* S *par la transformation $z = e^s$. Si le diamètre transfini τ de* T ([5]) *est inférieur à* 1, *on a*

$$(1) \qquad f(n) = \alpha_1^n P_1(n) + \ldots + \alpha_k^n P_k(n),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont les entiers algébriques en nombre fini situés alors avec tous leurs conjugués dans T, *et $P_1, \ldots, P_k$ des polynomes.*

Si $f(x)$ vérifie les conditions B *et si $\tau < 1$, alors on a pour tout x*

$$(2) \qquad f(x) = \alpha_1^x P_1(x) + \ldots + \alpha_k^x P_k(x).$$

Ce théorème donne en particulier les résultats suivants :

1° Si $f(x)$ est une fonction *entière*, S est le cercle $|s| \leqq \gamma$, son transformé T est le domaine $|ln z| \leqq \gamma$ dont le diamètre transfini τ croît avec γ et est égal à 1 pour $\gamma = \gamma_0 = 0,843\ldots$. Comme $\gamma_0 < \pi$, les conditions B sont vérifiées pour tout $\gamma < \gamma_0$ et *toute fonction arithmétique entière avec $\gamma < \gamma_0$ est de la forme* (2). En cherchant les entiers algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ qui peuvent être situés avec tous leurs conjugués dans T, on obtient suivant les valeurs de γ que :

si $\gamma < ln 2 = 0,6931\ldots$, alors $\alpha_1 = 1$ est le seul entier;

([4]) *Arch. Math. og Naturvid.*, **44**, 1940, IV, pp. 1-8.

([5]) Le diamètre transfini τ d'un ensemble T est la limite pour $n = \infty$ de la racine $n^{\text{ième}}$ de la borne inférieure des maxima dans T des modules de tous les polynomes de degré n dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1. Si $\tau < 1$, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers algébriques qui peuvent être situés avec tous leurs conjugués dans T. (FEKETE, *Math. Zeits.*, **17**, 1923, pp. 228-249).

si $\gamma < \left| ln\left((3+i\sqrt{3})/2\right) \right| = 0,7588...$, alors $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ sont les seuls entiers (⁶);

si $\gamma < 0,8$, alors $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = (3+i\sqrt{3})/2$, $\alpha_4 = (3 - i\sqrt{3})/2$ sont les seuls entiers pouvant figurer dans l'expression (2) de $f(x)$.

2° En partant en sens inverse du cercle $|z-1| \leq 1$ pour T, on obtient pour S l'ensemble $|e^s - 1| \leq 1$. Les fonctions arithmétiques $f(x)$ correspondantes sont celles étudiées par Carlson (³) dont on retrouve ainsi les résultats.

3° Soit $f(x)$ une fonction admettant un développement absolument et uniformément convergent pour tout $x \geq 0$ réel en série de Dirichlet généralisée $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(x) e^{-\lambda_\nu x}$, où $A_\nu(x)$ est un polynome de degré borné en x et où les λ_ν sont des exposants réels ou complexes, dont la partie réelle est bornée supérieurement et la partie imaginaire comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. L'ensemble S est alors formé de l'ensemble des points $-\lambda_\nu$ et de leur adhérence. *Si les λ_ν n'ont aucun point limite à distance finie*, alors $\tau = 0$, et *$f(x)$ ne peut être arithmétique que si son développement n'a qu'un nombre fini de termes et que les $e^{-\lambda_\nu}$ correspondants soient des entiers algébriques avec tous leurs conjugués*. Ainsi je démontre que si a et b sont réels, $|b| > 1$, la fonction

$$f(x) = \frac{a^x - 1}{b^x - 1} = (a^x - 1)(b^{-x} + \ldots + b^{-\nu x} + \ldots)$$

ne peut être arithmétique que si a et b sont des entiers rationnels et $a = b^m$, m entier rationnel positif.

La démonstration se base sur un théorème de MM. Carlson et Pólya (⁷). Nous considérons la série $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}$. La formule d'inversion de l'intégrale de Laplace donne alors $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} e^{xs} l(s)\, ds$, $\mathcal{L}$ étant un contour approprié, et par suite $F(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{l(s)\, ds}{z - e^s}$.

HYDRAULIQUE. — *Vérifications expérimentales de l'application des méthodes D. F. et S. G. aux chambres d'équilibre à section variable et à étranglement. Cheminées multiples*. Note (¹) de M. **Léopold Escande**, transmise par M. Charles Camichel.

1. Nous avons décrit (²) le dispositif expérimental que nous avons utilisé pour l'étude des oscillations à l'intérieur d'une chambre d'équilibre à section variable.

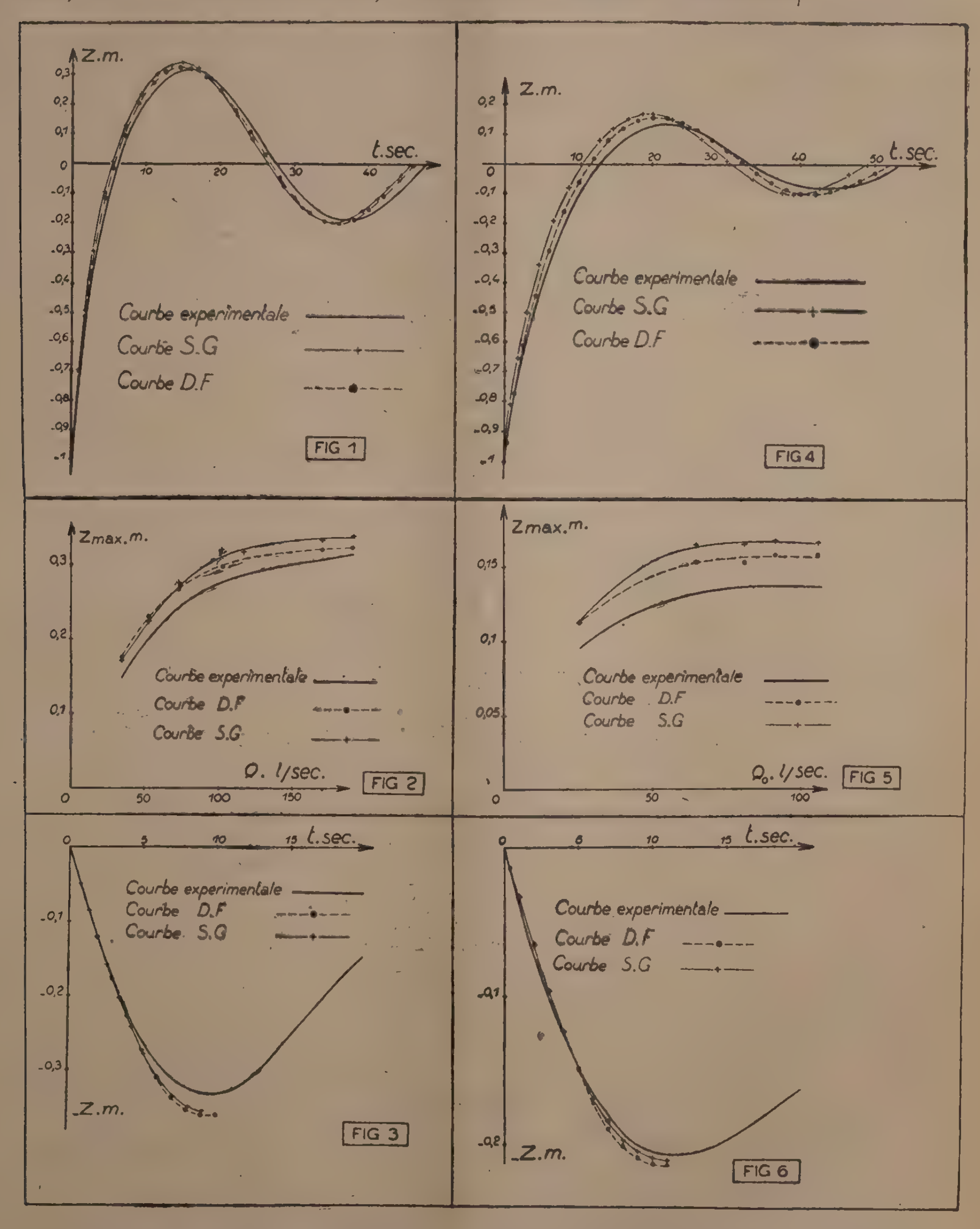
(⁶) La constante $\left| ln \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \right|$ est donc la meilleure possible pour le théorème de A. Selberg [voir (⁴)].

(⁷) *Jahresb. D. Math. V.*, 31, 1922, pp. 107-115; Pólya, *Math. Zeits.*, 29, 1929, pp. 549-624.

(¹) Séance du 8 avril 1946.

(²) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 589.

Nous avons étendu nos recherches aux chambres à étranglement, en plaçant, à la base de la chambre tronconique étudiée, un orifice d'étranglement dont le coefficient de perte de charge avait été préalablement déterminé par des mesures faites, en circulation continue, à travers un modèle à l'échelle 1/5.



Les expériences ont porté sur des manœuvres instantanées de fermeture ou d'ouverture; pour ces dernières la hauteur de chute H est assez faible pour qu'il soit nécessaire d'en tenir compte dans les calculs.

La figure 1 reproduit l'oscillation enregistrée d'une part, et calculée d'autre

part, au moyen de la méthode aux différences finies (D. F.) et de la méthode semi-graphique (S. G.), de fermeture instantanée, vanne V entièrement ouverte. La figure 2, donne, dans les mêmes conditions, les valeurs maxima Z_m de Z, en fonction du débit initial Q_0.

Les figures 4 et 5 fournissent respectivement les mêmes résultats que les figures 1 et 2, dans le cas où la vanne V est partiellement fermée.

Les figures 3 et 6 reproduisent l'enregistrement et le calcul de la première descente, dans deux expériences d'ouverture instantanée, la vanne V étant ouverte complètement (*fig.* 3) ou partiellement (*fig.* 6).

Dans l'ensemble les méthodes D.F. et S.G. conduisent à des amplitudes d'oscillation plus fortes que l'expérience; les écarts constatés admissibles pour la technique sont donc dans le sens de la sécurité; ces écarts sont d'ailleurs inférieurs, en valeur relative, à ceux que nous avions relevés, en l'absence d'étranglement.

2. Nous avons également voulu rechercher le degré d'approximation fourni par l'application des méthodes D.F. et S.G. à l'étude des cheminées multiples. Nous avons considéré, dans ce but, deux chambres à section constante, installées sur un même canal d'amenée en négligeant les pertes de charge; nous avons comparé les résultats approchés obtenus par les méthodes D.F. et S.G., aux valeurs rigoureuses que donne la solution analytique de ce problème, telle que nous l'avons mise en évidence dans des travaux antérieurs.

Dans l'exemple étudié nous avons trouvé, comme premier maxima de Z, dans les deux chambres d'équilibre,

	Calcul.	Méthode D.F.
	m	m
Chambre amont...........	7,462	7,52
» aval.............	6,74	6,88

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Extension du calcul vectoriel adaptée à la mécanique ondulatoire.* Note (¹) de M. **Michel Cazin.**

1. En mécanique ondulatoire non-relativiste on peut, comme l'a montré M. J.-L. Destouches (²), utiliser des trièdres en mouvement quantique liés aux corpuscules du système (par exemple, trièdre ayant son origine au centre de gravité et dont la direction des axes est liée aux corpuscules). Mais dans ce cas il faut distinguer pour les vecteurs cinétiques des composantes droites et gauches. Ceci nécessite l'utilisation d'un calcul vectoriel gauche dont nous voulons indiquer les règles essentielles.

2. En mécanique classique, les coordonnées des points matériels d'un système sont des fonctions du paramètre temps dont les valeurs sont des éléments du corps $\mathcal{K}$ des nombres réels. Ces points appartiennent donc à l'espace cartésien (R_3). Les grandeurs mécaniques vectorielles sont des vecteurs à composantes dans $\mathcal{K}$. Soit $\mathfrak{S}$ leur ensemble. En mécanique ondulatoire au

(¹) Séance du 8 avril 1946.

(²) Cours à la Faculté des Sciences de Paris, 1943; *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 48.

contraire, on choisit d'abord un repère fondamental T_0 parmi les repères galiléens pour fixer les variables indépendantes. Chaque corpuscule d'un système est figuré par un point M_i dont les coordonnées X_i, Y_i, Z_i par rapport à T_0 sont considérées comme des variables indépendantes; elles figurent comme arguments dans les fonctions d'ondes. En outre, à chaque corpuscule est associé un opérateur vectoriel quantité de mouvement de composantes $\mathbf{p}_{X_i} = i\hbar\partial_{X_i}$, $\mathbf{p}_{Y_i} = i\hbar\partial_{Y_i}$, $\mathbf{p}_{Z_i} = i\hbar\partial_{Z_i}$. En mécanique ondulatoire, on ne peut donc plus se borner à considérer un espace (R_3) et le système $\mathfrak{S}$ de vecteurs, mais il faut faire intervenir un espace $(R_3[X])$ dans lequel les points auront des coordonnées appartenant au corps $\mathcal{K}(X_1, \ldots, Z_N)$, en abrégé $\mathcal{K}(X)$, extension transcendante du corps $\mathcal{K}$, avec 3N variables si le système comprend N corpuscules, et un système de vecteurs $\mathfrak{S}(\partial)$ dont les composantes appartiennent à l'anneau non-commutatif $\mathcal{K}(X_1, \ldots, Z_N; \mathbf{p}_{X_1}, \ldots, \mathbf{p}_{Z_N})$, en abrégé $\mathcal{K}(\partial)$, extension transcendante de $\mathcal{K}(X)$ avec 3N variables $\mathbf{p}_{X_1}, \ldots, \mathbf{p}_{Z_N}$.

3. Chaque système de trois vecteurs orthonormaux d'origine commune, à composantes par rapport à T_0 dans $\mathcal{K}(X)$, définit un repère auquel on peut rapporter le mouvement des corpuscules. Soit $\mathfrak{T}$ l'ensemble de ces trièdres; il se décompose en deux classes : 1° l'ensemble des repères dits *commutatifs*, dont les paramètres appartiennent au corps $\mathcal{K}$; le passage d'un repère commutatif à un autre définit une transformation; leur ensemble $\mathcal{G}$ forme le groupe des déplacements euclidiens; 2° l'ensemble des repères dits *non-commutatifs* dont les paramètres appartiennent à $\mathcal{K}(X)$ sans que tous soient dans $\mathcal{K}$, c'est-à-dire que les paramètres sont des fonctions des variables associées aux corpuscules. Soit $\mathcal{G}(X)$ l'ensemble des transformations définies par le passage d'un repère (commutatif ou non) à un autre. $\mathcal{G}(X)$ forme un groupe qui contient $\mathcal{G}$.

4. Soient $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ les vecteurs unitaires de T_0. Un vecteur peut être défini par ses composantes le long des axes de T_0; elles appartiennent à $\mathcal{K}(\partial)$ et commutent avec $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$. Soit T un trièdre non-commutatif caractérisé par les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Ces vecteurs ne commutent pas avec les composantes d'un vecteur de $\mathfrak{S}(\partial)$ le long des axes de T, et l'on aura

$$\vec{V} = a_d\vec{i} + b_d\vec{j} + c_d\vec{k} = \vec{i}a_g + \vec{j}b_g + \vec{k}c_g;$$

a_d, b_d, c_d seront dits *composantes droites*, a_g, b_g, c_g seront dits *composantes gauches*.

5. La somme $\vec{V} + \vec{V}'$ sera définie par le vecteur ayant pour composantes la somme des composantes par rapport à T_0; *la somme a pour composantes droites la somme des composantes droites, et pour composantes gauches la somme des composantes gauches des vecteurs composants.*

6. Le produit $\lambda\vec{V}$ d'un vecteur $\vec{V}$ de $\mathfrak{S}(\partial)$ à gauche par un scalaire λ de $\mathcal{K}(\partial)$ est défini comme le vecteur ayant pour composantes par rapport à T_0 les

composantes de $\vec{V}$ multipliées à gauche par λ. *Les composantes droites de* $\lambda\vec{V}$ *par rapport à* T *sont les composantes droites de* $\vec{V}$ *multipliées à gauche par* λ. De même le produit $\vec{V}\lambda$ est défini comme le vecteur ayant pour composantes par rapport à T_0 les composantes de $\vec{V}$ multipliées à droite par λ. *Les composantes gauches de* $\vec{V}\lambda$ *par rapport à* T *sont les composantes gauches de* $\vec{V}$ *multipliées à droite par* λ.

7. Le produit scalaire de deux vecteurs est défini par la somme des produits des composantes par rapport à T_0. Il n'est pas commutatif. Le produit scalaire $(\vec{V}.\vec{V'})$ s'exprime à partir des composantes droites du premier, gauches du second, par rapport à T, par la formule :

$$(\vec{V}.\vec{V'}) = a_d a'_g + b_d b'_g + c_d c'_g,$$

d'où en particulier $|\vec{V}|^2 = (\vec{V}.\vec{V})$ et l'expression de la force vive d'un système.

8. Le produit vectoriel $(\vec{V} \wedge \vec{V'})$ de deux vecteurs de $\mathcal{S}(\partial)$ est défini par ces conditions

$$\vec{I} \wedge \vec{I} = 0; \quad \vec{I} \wedge \vec{J} = \vec{K}; \quad \vec{J} \wedge \vec{I} = -\vec{K};$$

$$(\vec{V_1} + \vec{V_2}) \wedge \vec{V'} = \vec{V_1} \wedge \vec{V'} + \vec{V_2} \wedge \vec{V'}; \quad \vec{V} \wedge (\vec{V'_1} + \vec{V'_2}) = \vec{V} \wedge \vec{V'_1} + \vec{V} \wedge \vec{V'_2};$$

$$(\lambda\vec{V} \wedge \vec{V'}) = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{V'}); \quad (\vec{V} \wedge \vec{V'}\mu) = (\vec{V} \wedge \vec{V'})\mu.$$

Si l'on ne connaît pas les relations de commutation des composantes droites de $\vec{V}$ avec $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, on ne peut obtenir les composantes gauches du produit à partir des composantes de $\vec{V}$ et de $\vec{V'}$; de même, si l'on n'a pas les relations de commutation des composantes gauches de $\vec{V'}$ avec $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, on ne peut obtenir les composantes droites du produit à partir des composantes de $\vec{V}$ et de $\vec{V'}$, car on a la formule

$$\vec{V} \wedge \vec{V'} = b_d \vec{i} c'_g - c_d \vec{i} b'_g + c_d \vec{j} a'_g - a_d \vec{j} c'_g + a_d \vec{k} b'_g - b_d \vec{k} a'_g.$$

Lorsqu'il y a commutation [cas d'un trièdre commutatif ou cas de vecteurs de $\mathcal{K}(X)$], on retombe sur l'expression habituelle.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur le centre de gravité de deux corpuscules de spin* 1/2. Note (¹) de M. **Serge Slansky**.

La plupart des propriétés du centre de gravité en mécanique ondulatoire n'entraînent aucune connexion nécessaire entre les masses servant à définir le

(¹) Séance du 15 avril 1946.

centre de gravité et les masses au repos des différents corpuscules ([2]). Nous avons indiqué ([3]) qu'on pouvait établir la relation qui existe entre ces deux sortes de masses, en mécanique ondulatoire *non relativiste*, à partir d'une propriété que nous avons appelée *condition de séparation*. Cette condition n'étant généralement pas satisfaite en mécanique ondulatoire *relativiste*, nous avons cherché à lui donner, dans ce dernier cas, une forme moins restrictive : *Pour un système libre, les équations d'ondes admettent des solutions qui ne dépendent que des coordonnées du centre de gravité.*

Considérons deux corpuscules de Dirac (de spin 1/2). Si nous identifions les temps des deux corpuscules en écrivant l'équation du système sous la forme

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}=(H_1+H_2)\psi, \tag{1}$$

avec

$$H_i=\alpha_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_i}+\alpha_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial y_i}+\alpha_3^{(i)}\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{2\pi i}{h}m_i c\,\alpha_4^{(i)},$$

nous n'obtenons, à partir de la condition de séparation au sens large telle que nous venons de la formuler, aucune relation nécessaire entre les coefficients du centre de gravité et les masses au repos des corpuscules. Mais le centre de gravité défini dans l'espace à partir des positions simultanées des corpuscules n'a pas une signification invariante dans tous les systèmes de référence :

Si nous commençons par attribuer un temps à chaque corpuscule en écrivant les équations du système sous la forme

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t_1}=H_1\psi;\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t_2}=H_2\psi, \tag{2}$$

et si nous considérons le centre de gravité comme un point d'*espace-temps* qui est le barycentre des points représentatifs des deux corpuscules affectés de certaines masses, la condition formulée plus haut entraîne, *au signe près*, l'identité des masses servant à définir le centre de gravité avec les *masses au repos* des deux corpuscules.

En effet, considérons un point G de coordonnées

$$X=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\qquad Y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2,\qquad Z=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2,\qquad T=\lambda_1t_1+\lambda_2t_2, \tag{3}$$

avec

$$\lambda_1+\lambda_2=1.$$

En posant

$$\xi_i=x_i-X,\qquad \eta_i=y_i-Y,\qquad \zeta_i=z_i-Z,\qquad \tau_i=t_i-T,$$

nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\lambda_i\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial \xi_i},\qquad \ldots.$$

([2]) J.-L. Destouches, *Principes fondamentaux de Physique théorique*, 1942, p. 802.

([3]) *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 492.

Les équations d'ondes (2) sont équivalentes à

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2\lambda_1}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{1}{2\lambda_2}\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{\lambda_1}+\frac{H_2}{\lambda_2}\right)\psi, \\ \left(\frac{1}{2\lambda_1}\frac{\partial}{\partial t_1}-\frac{1}{2\lambda_2}\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\psi=\frac{1}{2}\left(\frac{H_1}{\lambda_1}-\frac{H_2}{\lambda_2}\right)\psi. \end{cases}$$

Prenons comme variables X, Y, Z, T, et les ξ_i, η_i, ζ_i, τ_i et cherchons s'il existe des solutions ψ ne dépendant que de X, Y, Z et T. Elles doivent satisfaire les équations

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial T}\psi=\Big[\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{\alpha_3^{(1)}+\alpha_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Z} \\ \qquad +\frac{2\pi ic}{h}\left(\frac{m_1}{2\lambda_1}\alpha_4^{(1)}+\frac{m_2}{2\lambda_2}\alpha_4^{(2)}\right)\Big]\psi, \\ 0=\Big[\frac{\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\alpha_2^{(1)}-\alpha_2^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{\alpha_3^{(1)}-\alpha_3^{(2)}}{2}\frac{\partial}{\partial Z} \\ \qquad +\frac{2\pi ic}{h}\left(\frac{m_1}{2\lambda_1}\alpha_4^{(1)}-\frac{m_2}{2\lambda_2}\alpha_4^{(2)}\right)\Big]\psi, \end{cases}$$

qui ne sont compatibles que dans les deux cas

$$\lambda_1=\frac{m_1}{m_1+m_2},\quad \lambda_2=\frac{m_2}{m_1+m_2}\quad \text{ou}\quad \lambda_1=\frac{m_1}{m_1-m_2},\quad \lambda_2=\frac{-m_2}{m_1-m_2}.$$

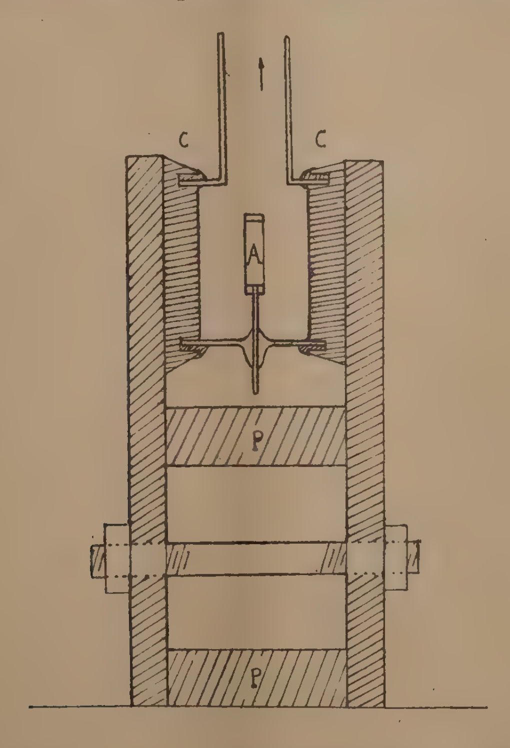
En prenant le signe +, le point G coïncide avec le centre de gravité au sens classique quand on ne considère que des positions simultanées des deux corpuscules. L'autre solution, qui n'a d'ailleurs un sens que si les corpuscules sont différents, paraît liée au fait que les équations de Dirac peuvent aussi représenter un corpuscule de masse négative. Nous pouvons remarquer aussi que, *dans le cas du centre de gravité, les équations* (5) *donnent l'ensemble des équations de la particule de spin* 1 *et de masse* m_1+m_2, sans qu'on ait besoin de supposer les masses m_1 et m_2 égales, tandis qu'en partant de l'équation (1) avec un temps unique nous n'aurions obtenu pour le centre de gravité qu'un seul des deux groupes d'équations de la particule de spin 1, et seulement dans le cas de deux masses égales.

Le théorème des probabilités totales ne pouvant s'appliquer qu'à des événements simultanés, pour des raisons de normalisation, il ne semble pas qu'on puisse définir en général une probabilité de présence pour le *centre de gravité d'espace-temps*, comme on le ferait en mécanique ondulatoire non relativiste, où l'on peut toujours utiliser un temps unique.

TECHNIQUE DU VIDE. — *Un dispositif de sécurité pour installation à vide.* Note (¹) de M. **Maurice Schérer**, présentée par M. Aimé Cotton.

En vue de protéger une installation de vide contre les rentrées inattendues d'air ou de gaz, on peut utiliser différents dispositifs et en particulier adapter des appareils de contrôle continu de la pression (tels que jauge à ionisation, jauge de Pirani, couple thermoélectrique) à la commande d'un relai pour effectuer la séparation de la canalisation du groupe de pompage.

Le dispositif suivant est particulièrement simple à installer : on utilise l'action d'un champ magnétique sur la décharge dans le gaz; il en résulte, dans un certain domaine de pression, une augmentation considérable de la conductibilité du tube. (Il est possible, comme on sait, de se servir de cet effet pour la mesure même de la pression dans l'intervalle de $1/10$ à $1/10^5$



millimètres de mercure, avec un milliampèremètre seul). J'ai utilisé cette décharge en alimentant un tube comprenant une double cathode CC de fer doux et une anode annulaire A d'aluminium sous 450 volts continus. Le champ magnétique est produit par un aimant permanent P placé entre deux plaques de fer.

(¹) Séance du 15 avril 1946.

Pour un champ de 200 gauss dans un entrefer de 20^{mm} on obtient les débits suivants en milliampères pour les diverses pressions en millimètres de mercure.

P...............	10^{-1}.	10^{-2}.	10^{-3}.	10^{-4}.
i.............	40	18	1	0,1

J'ai admis qu'il suffisait de fermer en un temps de trois à quatre secondes un robinet de laiton de 40 mm de voie après l'élévation de la pression à 1/10 de millimètres environ pour que l'huile de la pompe à condensation se trouvât bien protégée. On peut le faire simplement par la chute d'un poids.

Il est commode d'utiliser un électroaimant de haut-parleur pour le maintien du robinet dans la position ouverte. Un second enroulement, ajouté à celui de maintien et excité en sens inverse par le courant produit dans le tube lors de l'élévation de la pression, compense en partie l'aimantation produite par l'enroulement de maintien. Il y a donc fermeture automatique et rapide du robinet lorsque la pression devient voisine de 1/10 de millimètre. Pendant le pompage, lorsque la pression est inférieure à 10^{-5} millimètre, l'alimentation continue sous 450 volts n'a donc à fournir que le faible courant de l'enroulement de maintien.

Il est évident qu'il est possible de régler la masse en marche du dispositif à telle pression que l'on désire en agissant sur le courant de maintien (compte tenu de la rémanence du noyau).

ÉLECTROMAGNÉTISME. — *Réflexion d'une onde électromagnétique sur un disque logé dans un guide d'onde.* Note [1] de M. **Théo Kahan.**

J'ai montré [2] que, quel que soit le mode de vibration d'une onde guidée frappant une cavité semi-transparente, le guide d'onde débouchant dans cette cavité peut être considéré comme dénué de réflexion, à condition que la longueur de la cavité soit un nombre impair de quarts d'onde. J'ai indiqué aussi qu'il fallait pour cela que le coefficient de réflexion de la lame semi-transparente séparant le guide de la cavité soit égal à 1/3. Je vais montrer, en me servant des équations de l'Électromagnétisme, qu'il en est bien ainsi.

Je considère donc un guide de section circulaire, terminé par un disque semi-transparent. Je suppose l'onde incidente du type TM_{01} et je désigne par E_ρ et H_φ respectivement le champ électrique radial et le champ magnétique circulaire. Soient o le point où l'axe du guide perce le disque sur sa face antérieure, o' le point où cet axe perce sa face postérieure, a le point où une génératrice passant à la distance ρ de o, perce la face antérieure, a' le point où

(1) Séance du 18 mars 1946.

(2) *Comptes rendus*, **111**, 1946, p. 535.

celle-ci perce la face postérieure; soit encore b le point où une autre génératrice située à la même distance ρ de l'axe perce la face antérieure, b' le point où elle perce la face postérieure; soit enfin φ l'angle que font o, a et o, b (ou $o'a'$ et $o'b'$).

Si j'applique la première loi de l'Électrodynamique (circulation du vecteur H) au contour $aa'bb'$, j'obtiens, en désignant par l'indice supérieur i le champ incident, par l'indice r le champ réfléchi, par l'indice d le champ dans le disque, et par l'indice t le champ transmis,

$$\oint \vec{H}\, ds = \int_0^\varphi (H_\varphi^i + H_\varphi^r - H_\varphi^t)\rho\, d\varphi = \int_0^\varphi \left(\varepsilon \frac{\partial E_\rho^d}{\partial t} + g E_\rho^d\right).\delta.\rho.d\varphi,$$

soit [les champs étant censés varier comme $\exp(j\omega t)$],

$$(1) \qquad H_\varphi^i + H_\varphi^r - H_\varphi^t = j\varepsilon\omega\,\delta\, E_\rho^d + g\,\delta\, E_\rho^d = \delta\, E_\rho^d(g + j\varepsilon\omega),$$

δ étant l'épaisseur oo' du disque, ε sa constante diélectrique et g sa conductivité. De même, appliquons la seconde loi (*d'induction*) au contour $oaa'o'$ [3] :

$$(2) \qquad \oint \vec{E}\, \vec{ds} = \int_0^\rho (E_\rho^i - E_\rho^r - E_\rho^t)\, d\rho = \int_0^\rho \mu \frac{\partial H_\varphi^d}{\partial t}\,\delta\, d\rho = \int_0^\rho j\omega\mu . H_\varphi^d\,\delta\, d\rho;$$

soit $E_\rho^i - E_\rho^r - E_\rho^t = j\omega\mu\,\delta H_\rho^d$. La condition de continuité sur la face antérieure du disque exige d'autre part $E_\rho^i - E_\rho^r = E_\rho^d$.

Je veux calculer $r = E_\rho^r/E_\rho^i$. Soit $z_c = E_\rho/H_\varphi$ l'impédance caractéristique du guide. Je tire alors de (1)

$$1 + r - \frac{E_\rho^t}{E_\rho^i} = z_c\,\delta\,\frac{E_\rho^d}{E_\rho^i}(g + j\omega\varepsilon).$$

De même de (2) je tire : $1 - r - E_\rho^t/E_\rho^i = j\omega\mu\,\delta/z_c\, E_\rho^d/E_\rho^i$.

En combinant ces formules j'obtiens aisément

$$r = \frac{z_c\,\delta(g + j\varepsilon\omega) - j\omega\mu\delta/z_c}{2 + \delta z_c(g + j\omega\varepsilon) + j\omega\,\delta\mu/z_c}.$$

Or, pour un disque métallisé, on a $\varepsilon\omega \ll g$. Dans mes expériences δ était de l'ordre de 10^{-6} cm, aussi le terme en $\mu\omega\delta \sim 10^{-3}$ est-il petit devant $g\delta \approx 1 (g \sim 10^6$ mho/cm). Je puis donc écrire $r = z_c g\,\delta/2 + z_c g\,\delta)$.

---

[3] En toute rigueur il faudrait ajouter les termes $\int_{aa'} E_z(\rho)\, dz$ et $\int_{o'o} E_z(\rho)\, dz$. Or $\int_0^\delta E_z\, dz < \delta\, E_z \max = 10^{-6} E_z \max$, δ étant de l'ordre de 10^{-6} cm, et, par suite,

$$\int_0^\delta E_z\, dz < 10^{-6} E_z \max \ll \int_0^R E_\rho\, d\rho < R E_\rho \max,$$

R étant le rayon du guide, de l'ordre de plusieurs centimètres. On peut donc assurément négliger les deux intégrales ci-dessus.

Or $1/(g\delta)$ est la résistance superficielle R du disque, de sorte que $r = (z_c/R)/(2 + z_c/R)$. Si donc $R = z_c$, $r = 1/(2+1) = 1/3$. C'est précisément le coefficient de réflexion calculé dans la Note citée [1].

En résumé : 1° si un guide d'onde est terminé sur un tronçon indéfini de guide, de même section, il est bouclé sur son impédance caractéristique et il ne se produit pas de réflexion, et, partant, pas de système stationnaire; 2° si un guide est terminé par un disque semi-transparent, dont l'impédance est égale à l'impédance caractéristique du guide, tout se passe comme si le guide était bouclé sur son impédance caractéristique en parallèle avec l'impédance de l'espace libre; il se produit alors un système d'ondes stationnaires; 3° si ce guide est terminé sur un disque semi-transparent d'impédance égale à son impédance caractéristique et qu'il soit prolongé au delà par un guide indéfini de même section, tout se passe comme si le guide était bouclé sur sa demi-impédance caractéristique, et il y aura apparition d'ondes stationnaires; 4° si, enfin, le guide est terminé par un disque semi-transparent ayant un coefficient de réflexion de 1/3 (donc d'impédance égale à l'impédance caractéristique du guide), suivi par une cavité ayant une longueur égale à un nombre impair de quarts d'onde, le guide sera bouclé sur son impédance caractéristique sans réflexion.

ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE. — *Remarque sur la propagation d'un signal électromagnétique sur une ligne hétérogène.* Note [1] de M. **François Raymond**.

Nous avons exposé [2] une méthode de résolution des équations de propagation à l'aide de développements en série faisant intervenir, à la base, la notion de deux ondes se propageant en sens inverses sur la ligne bifilaire considérée.

Nous reportant à cette Note, équation (6), on a

$$\frac{dQ}{dx} = -\left[C^{-1}\frac{dC}{dx} + C^{-1}MC\right]Q = -[N_1 + N_0]Q, \tag{6}$$

où les matrices N_0 et N_1 y ont été explicitées.

Le vecteur Q considéré a pour composantes R et S, homogènes à un courant, qui sont les transformées de Laplace des courants des ondes se propageant selon les x croissants et dans le sens contraire sur la ligne, l'équation (6) s'explicite comme suit, Z étant l'impédance itérative isomorphe

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= -\gamma R - \frac{1}{2Z}\frac{dZ}{dx}(R+S), \\ \frac{dS}{dx} &= +\gamma S + \frac{1}{2Z}\frac{dZ}{dx}(R+S), \end{aligned}\right. \tag{11}$$

(1) Séance du 1er avril 1946.
(2) *Comptes rendus*, 220, 1945, p. 450.

on en déduit

$$R_{x+dx} = R_x\left(1 - \gamma\, dx - \frac{dZ}{2Z}\right) - \frac{dZ}{2Z} S \tag{12}$$

et une relation analogue pour exprimer S au point d'abscisse $x + dx$ en fonction de R et de S du point x.

Cette relation montre que l'onde R au point $x + dx$ contient une proportion $(dZ/2Z)$ de l'onde S se propageant en sens inverse. On a donc défini en toute rigueur le coefficient de réflexion, au point x, pour les ondes S et R respectivement,

$$d\rho = -\frac{dZ}{2Z}, \qquad d\rho = \frac{dZ}{2Z}, \tag{13}$$

en mesurant la variation dZ suivant le sens de propagation de l'onde considérée.

Si la ligne présente, en un point x_1, une discontinuité, la dérivée (dZ/dx) devient infinie, et un calcul simple montre que, dans ce cas, en intégrant entre $x_1 - \varepsilon$ et $x_1 + \varepsilon'$ (ε, ε' aussi petits que l'on veut), on a

$$R_2 - R_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{2}\left[\frac{R_1 + S_1}{2Z_1} + \frac{R_2 + S_2}{2Z_2}\right], \tag{14}$$

en désignant par R_1 la valeur de R au point $x_1 - \varepsilon$ et par R_2 sa valeur en $x_1 + \varepsilon'$. En faisant la même convention pour Z_1 et Z_2 on obtient

$$R_2 = R_1 \frac{1 + 2\rho_1}{1 + \rho_1 + \rho_2} - S_2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{1 + \rho_1 + \rho_2}, \qquad \rho_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{4Z_1}, \qquad \rho_2 = \frac{Z_1 - Z_2}{4Z_2},$$

relation analogue à (12), mettant en évidence le coefficient de réflexion

$$\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{1 + \rho_1 + \rho_2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_1},$$

et, comme $(1 + 2\rho_1)/(1 + \rho_1 + \rho_2) = 1 - \rho$, on a le coefficient de transmission $\tau = 1 - \rho$ dont la valeur est $\tau = (2Z_1)/(Z_1 + Z_2)$.

Pour l'autre sens de propagation, le coefficient de réflexion est $(z_1 - z_2)/(z_1 + z_2)$ et le coefficient de transmission

$$\tau' = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Ces propriétés donnent, dans le cas d'une discontinuité du premier ordre en un point de la ligne, et pour un régime d'oscillation entretenu de pulsation $p = j\omega$, un résultat connu. Sa démonstration montre que le coefficient de réflexion élémentaire d'une ligne hétérogène est

$$d\rho = \pm \frac{dZ}{2Z}, \qquad \text{où } Z = \sqrt{\frac{jl\omega + r}{jc\omega + \varphi}}.$$

Considérons enfin des signaux fonctions quelconques du temps et de l'espace

tels toutefois qu'en tout point x on ait $i_1 = i_2 = o$ pour $t \leq o$,

$$(16) \quad \begin{cases} i_1(x, t) \supset R(x, p), & i_2(x, t) \supset S(x, p) \quad (^3), \\ G(x, t) \supset \gamma(x, p), & F(x, t) \supset \frac{1}{2Z}\frac{dZ}{dx}, \end{cases}$$

les équations (11) conduiront à

$$(17) \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = -\int_0^t G(t-u)\, i_1(u)\, du - \int_0^t F(t-u)[i_1(u) + i_2(u)]\, du,$$

et à une relation analogue pour i_2.

Ces équations expriment, pour des signaux quelconques se propageant dans deux sens différents sur la ligne donnée, la loi de variation de ces signaux en fonction de t et de x.

Examinons le cas simple où la ligne n'a pas de pertes :

$$\gamma = \sqrt{lc}\, p, \qquad Z = \sqrt{\frac{l}{c}};$$

donc on a simplement dans ce cas

$$(18) \quad \frac{\partial i_1}{dx} = \sqrt{lc}\,\frac{\partial i_1}{\partial t} - \frac{1}{2Z}\frac{dZ}{dx}(i_1 + i_2)$$

(et une relation analogue pour i_2) mettant en évidence le coefficient de réflexion $dZ/2Z$.

Nous avons élucidé deux aspects fondamentaux de la notion de coefficient de réflexion sur une ligne hétérogène, tel était l'objet de cette Note.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur l'étude et l'interprétation du déclin de la phosphorescence des sulfures.* Note [1] de M. **Jean Saddy**, présentée par M. Frédéric Joliot.

I. J'ai exposé [2] les conclusions d'une étude comparative des formules proposées par divers auteurs pour le déclin de la phosphorescence. La substance expérimentée était un ZnS(Cu) excité par l'ultraviolet. Seules les formules à termes multiples, hyperboliques ou exponentiels, donnent une représentation suffisamment précise du phénomène, et le type en somme d'exponentielles à exposants du premier degré en t convient particulièrement bien.

Mes mesures antérieures portaient sur des durées de déclin comprises entre 20 secondes et 2 heures 1/2; j'ai voulu les compléter par d'autres portant sur

(3) ⊃ signifie que i_1 (par exemple) est l'original de R, dans la correspondance de Laplace.

(1) Séance du 8 avril 1946.

(2) *Comptes rendus*, 219, 1944, pp. 314-315.

des durées plus courtes. La nécessité d'observer un produit toujours préalablement excité à saturation m'a amené à réaliser un appareil à disque tournant.

Un disque, animé d'un mouvement de rotation uniforme (un tour par minute), a sa périphérie garnie de sulfure. Un cache escamotable en forme de quadrant peut être interposé automatiquement entre la source excitatrice et la substance; celle-ci commence son déclin dès l'instant où elle franchit la limite de l'ombre portée; elle passe alors au-dessous d'un dispositif optique mis en place en même temps que le cache, et la lumière émise pénètre dans un photomètre à glazebrooks. Tous les éléments de la surface phosphorescente sont parvenus au même stade de déclin quand ils sont arrivés au même niveau de visée photométrique et l'observateur dispose de tout le temps nécessaire pour la mesure.

L'appareil a permis d'étudier le déclin à partir de la deuxième seconde et jusqu'à 30 sec. Les résultats obtenus s'interprètent bien par la formule en somme d'exponentielles en adjoignant un sixième terme à ceux qui avaient été adoptés dans la précédente étude. La formule ainsi complétée traduit à moins de 1 % près, en moyenne, le déclin du $ZnS(Cu)$ entre 2 sec. et 2 h. 1/2.

II. La formulation du déclin de la phosphorescence par une somme d'exponentielles a l'avantage d'indiquer en gros la répartition des durées de vie au cours du déclin de la luminescence. Soit en effet, au temps $t = 0$, n_0 le nombre d'électrons de phosphorescence fixés sur une certaine espèce de niveau d'énergie métastable; le nombre d'électrons existant encore dans cet état au temps t est

$$n = n_0 e^{-kt}.$$

L'intensité de phosphorescence, due au retour de ces électrons à leur place normale, est

$$\mathcal{J} = -c\frac{dn}{dt} = ckn_0 e^{-kt}.$$

Au temps $t = 0$

$$\mathcal{J}_0 = ckn_0.$$

Donc n_0 est proportionnel à $\mathcal{J}_0/k$, c'est-à-dire à $\mathcal{J}_0\tau$, en appelant τ la durée de vie moyenne.

Chacun des termes exponentiels $\mathcal{J}_0 e^{-kt}$ dont se compose l'expression de $\mathcal{J}$, correspond à une espèce déterminée de niveau d'énergie métastable. Les coefficients k représentent les inverses des vies moyennes pour chaque niveau; et les quotients des coefficients $\mathcal{J}_0$ par les valeurs de k correspondantes sont proportionnels aux nombres de *centres* des différentes espèces existant à l'instant 0. En adoptant cette manière de voir, le déclin de la phosphorescence du $ZnS(Cu)$ étudié, pendant l'intervalle de temps compris entre 2 sec. et 2 h. 1/2 après la fin de l'excitation, correspondrait très sensiblement à celui d'un ensemble tel que celui indiqué dans le tableau ci-dessous, dans lequel est aussi indiquée la distribution moyenne des centres pour $CaS(Bi)$, d'après Lenard et Kuppenheim [2].

---

(2) Voir *Handbuch für exper. Phys.*, **1**, 1928, p. 188.

ZnS(Cu)		CaS(Bi)	
Nombre de centres	Vies moyennes comprises entre	Nombre de centres.	Vies moyennes comprises entre
19......	2 sec. et 7 sec.	385......	2 sec. et 18 sec.
101......	7 » » 32 »	1000......	18 » » 1 min.
369......	32 » » 50 »	897......	1 min. » 5 »
1000......	50 » » 7 min.	779......	5 » » 20 »
527......	7 min. » 21 »	656......	20 » » 1 h.
281......	21 » » 2 h. 1/2	508......	1 h. » 4 »

Ainsi, pour ces deux substances-types, ZnS(Cu) et CaS(Bi), ce ne sont pas les *centres phosphorescents* à durées de vie les plus courtes qui sont les plus nombreux, mais ceux dont les durées de vie sont de l'ordre de quelques minutes. D'une manière plus précise, ce sont les niveaux discrets de fixation momentanée des électrons de phosphorescence correspondant à ces durées moyenne de vie qui sont les plus nombreux. La distribution autour de ces valeurs maxima a une allure de distribution statistique et ce ne sont pas les niveaux de moindre énergie qui sont les plus nombreux.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur un mode de condensation anormal de certains chlorures d'acides avec les éthers phénoliques, et son application à la synthèse de dérivés aryléthyléniques.* Note [1] de MM. **Charles Mentzer** et **Dat Xuong**, présentée par M. Marcel Delépine.

Ayant eu l'occasion de préparer de la *p*-méthoxyphénylisopropylcétone par action du chlorure d'isobutyryle sur l'anisol selon Friedel et Crafts, nous avons constaté qu'il se forme, à côté de la cétone déjà obtenue de cette façon par V. Auwers [2] en 1915, une substance dont la présence dans le produit de la réaction n'avait pas encore été signalée jusqu'ici. Cette substance, fondant à 64°, donne une très belle coloration rouge par addition de SO_4H_2 ou de $POCl_3$ (réaction d'halochromie), et peut être oxydée par CrO_3 en 4.4 diméthoxybenzophénone. D'après ces faits le corps en question pouvait bien être de l'*αα-bis-p*-méthoxyphénylisobutylène $(CH_3O - C_6H_4)^2C = C(CH_2)^2$ (I) déjà préparé en 1928 par Pfeiffer et Wizinger [3] au moyen de la méthode de Grignard. En vue de vérifier cette hypothèse, nous avons fait réagir, comme ces derniers auteurs, le bromure de *p*-méthoxyphénylmagnésium sur l'isobutyrate d'éthyle; après déshydratation, nous avons ainsi pu obtenir un corps fondant également à 64°, identique à tous les points de vue au dérivé nouveau que nous avions isolé et qui possède donc bien la structure (I). En 1869,

(1) Séance du 15 avril 1946.
(2) *Liebigs Annalen der Chemie*, 408, 1915, p. 250.
(3) *Ibid.*, 461, 1928, p. 146.

Gattermann ([4]) avait déjà obtenu, au cours d'une réaction de Friedel, de l'$\alpha\alpha$-*bis*-[*p*-méthoxyphényl] propylène, et en 1924, Skraup et Nieten ([5]) ont signalé la formation de petites quantités d'$\alpha\alpha$-*bis*-*p*-méthoxyphénylbutylène, par action du chlorure de butyryle sur l'anisol. Mais les observations isolées de Gattermann et de Skraup pouvaient être considérées jusqu'ici comme des cas particuliers. Il nous a donc paru intéressant de déterminer dans quelle mesure cette condensation anormale de Friedel pouvait être généralisée.

Nous avons été ainsi amenés à modifier la technique initiale de façon à diminuer le rendement en cétones au profit des dérivés éthyléniques, et, grâce au nouveau mode opératoire ainsi mis au point, nous avons pu obtenir de tels dérivés là où jusqu'ici seule la formation de cétones avait été signalée. Ainsi le chlorure de chloracétyle, condensé avec l'anisol, nous a permis de préparer, à côté de la *p*-méthoxychloracétophénone déjà synthétisée par Kunckell et Johannssen ([6]), de l'$\alpha\alpha$-*bis*-[*p*-méthoxyphényl] chloréthylène $(CH_3O-C_6H_4)_2C=CHCl$ (II) dont la présence dans le produit de la réaction avait échappé aux auteurs précédents. La structure de (II) a été prouvée par sa transposition en 4.4'-diméthoxytolane, puis en désoxyanisoïne, conformément aux réactions de Wiechell ([7]). Il y a donc là une nouvelle voie permettant d'accéder aux dérivés du 4.4'-dihydroxystilbène à activité hormonale, sans avoir besoin d'aldéhyde anisique ou de chlorure d'anisyle. Parmi les autres chlorures d'acides étudiés, le chlorure de l'acide isovalérianique a également donné naissance au dérivé éthylénique correspondant; par contre le chlorure de l'acide diéthylacétique et le chlorure de l'acide phénylacétique se sont comportés normalement, en donnant presque uniquement des cétones. En remplaçant l'anisol par d'autres éthers phénoliques substitués sur le noyau, il est également possible d'obtenir la condensation anormale; cependant, là non plus la réaction n'est pas absolument générale, et il est nécessaire de déterminer pour chaque cas particulier, les conditions expérimentales permettant l'obtention du dérivé éthylénique avec un rendement maximum.

En ce qui concerne le mécanisme de telles synthèses, il faut croire que le chlorure d'acide se combine simultanément à 2^{mol} d'anisol avec perte d'eau, puis de ClH, de la façon suivante :

$$2ArH + RCH_2COCl \rightarrow (Ar)^2CCl-CH_2R \rightarrow (Ar)^2C=CHR + ClH.$$

Un tel mécanisme tend à montrer qu'il existe entre le carbonyle des chlorures d'acides, des aldéhydes et des cétones, une certaine parenté chimique.

Partie expérimentale. — Faire réagir selon Friedel et Crafts, 1^{mol} de chlorure d'acide sur 2^{mol},5 d'éther phénolique, en présence de 1^{mol} de Cl_3Al, à la température ordinaire, pendant 3 jours. Traiter comme d'habitude ([8]). Voici à titre d'exemples, quelques-uns des

([4]) *Ber. d. chem. Ges.*, **22**, 1889, p. 1130.

([5]) *Ibid.*, **57**, 1924, p. 1300.

([6]) *Ibid.*, **30**, 1897, p. 1715.

([7]) *Liebigs Annalen der Chemie*, **279**, 1894, p. 338.

([8]) Des renseignements plus précis seront donnés dans la Thèse de l'un de nous.

corps jusqu'ici obtenus : *αα-bis*-[*p*-méthoxyphényl]-isobutylène, $C_{18}H_{20}O_2$, F 64°, $É_{20}$ 212-216°; *αα-bis*-[*p*-méthoxyphényl]-isopropyléthylène, $C_{19}H_{22}O_2$, $É_{13}$ 220°; *αα-bis*-*p*-méthoxyphényl]-chloréthylène (II) (⁹), $C_{16}H_{15}O_2Cl$, F 76°; *αα-bis*-[méthyl-3-méthoxy-4-phényl]-propylène, $C_{19}H_{22}O_2$, F 89°; *αα-bis*-[méthyl-2-éthoxy-4-phényl]-porpylène, $C_{21}H_{26}O_2$, $É_{13}$ 240°.

LITHOLOGIE. — *Variabilité affectant la constitution des limons quaternaires du Bassin de Paris.* Note [1] de M. **Henri Malterre**, présentée par M. Albert Demolon.

L'analyse de près de 1200 échantillons de limons quaternaires, prélevés en Picardie, dans le Pays de Caux, le Noyonnais, le Clermontois, le Soissonnais, le Valois, le Multien, la région parisienne, la Brie et la Beauce a mis en évidence avec une netteté particulière la diversité de constitution des roches appartenant à cette formation. Cette variabilité affecte les limons aussi bien dans le sens horizontal, c'est-à-dire dans un même niveau stratigraphique, que dans le sens vertical, c'est-à-dire en passant d'un niveau à un autre. Elle est visible à l'intérieur d'une même région en raison des circonstances locales qui ont présidé à la formation et à l'évolution du sédiment, mais, comme on peut le voir dans le tableau ci-après, elle l'est bien davantage en passant d'une région naturelle donnée aux régions voisines :

	Colloïdes argileux pour 100 de terre fine [2].		
	Minimum.	Maximum.	Moyenne.
Vimeu	5,5	22,7	13,2
Caux	7,5	23,2	15,0
Santerre	8,9	29,8	20,4
Brie	9,7	39,8	23,2
Beauce	15,0	41,4	30,1

Il existe donc des limons renfermant près de huit fois plus de minéraux argileux que d'autres, sans que, malgré cela, la roche cesse de posséder les caractères mécaniques et physiques qui la font classer sans hésiter parmi les limons. Les différences ne sont dues que pour une faible part à l'évolution pédologique, puisque les compositions moyennes, aux différentes profondeurs, montrent une variabilité de même ordre. Comme les teneurs en éléments argileux, les teneurs en éléments siliceux et calcaires varient largement d'un point à un autre : pour les dix régions dont il vient d'être question, le taux d'éléments siliceux dont le diamètre dépasse $0^{mm},002$ est compris entre 55 et 93 % et, sauf dans quelques cas exceptionnels, le taux de CO_3Ca varie entre 0 et 29 %. En ce qui concerne les minéraux lourds, il apparaît que la

(⁹) Ce corps avait été déjà obtenu par Wiechell [réf. (⁶)] par action du dichloracétal sur l'anisol en présence de SO_4H_2, et traitement du dérivé dichloré formé par C_2H_5ONa en vue d'arracher une molécule de ClH.

[1] Séance du 15 avril 1946.

[2] Taux déterminés à l'aide de la Méthode internationale d'analyse mécanique des sols.

répartition des sept espèces caractéristiques principales (zircon, épidote, tourmaline, rutile, staurotide, grenat, amphibole), qui ensemble comptent pour 83 à 96 % du nombre total d'individus présents, est, elle aussi, très différente suivant le lieu de prélèvement. A ce point de vue les limons subissent une variation régionale, ou tout au moins zonale, qui se complique d'une variation locale ([3]). En particulier les limons de Picardie et du Petit Caux se singularisent par leur pauvreté en zircon et par leur teneur élevée en grenat et en amphibole.

Les mesures granulométriques permettent d'obtenir des caractéristiques intéressantes pour la définition des limons ([4]); il s'en faut cependant de beaucoup que la finesse soit partout comparable. Ainsi, par exemple, le pourcentage de granules siliceux dont le diamètre est supérieur à $0^{mm},06$ oscille entre 2,7 et 44,7 dans l'horizon superficiel des sols dérivés des limons de la Brie, et cette variation se retrouve dans les horizons profonds; les limons du Vimeu au nord de la route Abbeville-Eu sont bien plus grossiers que les limons au sud de la même route, et l'on pourrait multiplier les exemples de ce genre.

Dans la Brie subsistent, disséminés sur presque toute la surface de la région, de nombreux îlots de sables de Fontainebleau dont les grains ne traversent pratiquement pas la maille de $0^{mm},06$; les limons situés à plus de 4^{km} des buttes témoins, ou séparés de celles-ci par des vallées plus ou moins profondes, contiennent une proportion bien moins élevée d'éléments grossiers que les limons situés dans la zone d'influence des sables; voici les données numériques extrêmes et moyennes relatives à 13 comparaisons réalisées :

	Éléments d'un diamètre supérieur à 60^{μ} (pour 100 de terre fine).		
	Minimum.	Maximum.	Moyenne.
Zone d'influence des sables...	9,8	44,7	24,5
Zone protégée..................	2,7	21,5	7,1

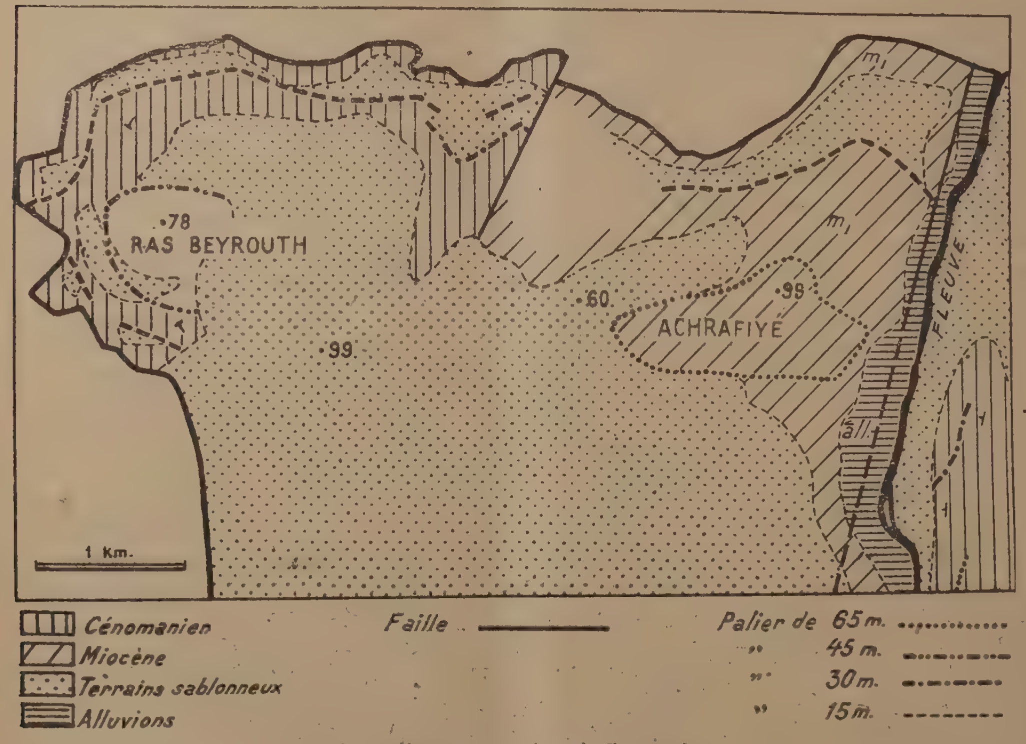
La discussion statistique de ces résultats, qui concernent uniquement les horizons superficiels, montre la très haute probabilité de l'influence des sables stampiens sur la finesse des limons voisins; cette influence n'a pu s'exercer que par le mélange des sables aux autres éléments au moment de la formation des limons puisqu'elle s'observe en profondeur aussi bien qu'en surface.

Conclusions. — Les limons quaternaires constituent un groupe bien plus hétérogène au point de vue chimique et minéralogique qu'on ne le pense généralement. Cette hétérogénéité affecte tout l'ensemble, mais également chaque niveau stratigraphique, l'ergeron ou la terre à brique dérivée de celui-ci (lœss récent) en particulier: elle ne peut s'expliquer que par des différences dans les actions dynamiques qui ont présidé à la formation des limons ou par des différences de nature des roches-mères. Des exemples tels que celui de la Brie montrent que cette dernière éventualité s'est trouvée très souvent réalisée.

([3]) S. Duplaix et H. Malterre, *Bull. Soc. Géol. Fr.*, avril 1946.
([4]) B. Brajnikov, *Comptes rendus*, **212**, 1941, p. 801.

GÉOLOGIE. — *Géologie et morphologie de Beyrouth (Liban).*
Note [1] de M. **Louis Dubertret**, présentée par M. Charles Jacob.

En gros de structure tabulaire dans sa partie sédimentaire marine, la plate forme de Beyrouth s'appuye contre un bord montagneux net, à couches fortement redressées. Son tronçon de côte O-E semble être en relation avec le faisceau de failles qui, à cette latitude, recoupent transversalement le Liban. L'autre côte, N-S, est une plage sableuse. Le bord Nord, sur 2^{km} de large, s'élève en une barrière rocheuse également O-E, formée par les deux buttes calcaire cénomanienne de Ras Beyrouth (78^{m}) et marneuse miocène d'Achrafiyé (99^{m}) que sépare un col (60^{m}) reliant le port à l'intérieur. Au Sud, sur 10^{km}, se développe un paysage sableux, partie alluvial, partie dunaire.



Les paliers quaternaires de Beyrouth.

Les deux buttes représentent deux blocs tectoniques, juxtaposés le long d'une faille SSO-NNE, marquée par une falaise de calcaire cénomanien tombant sur la marne miocène tendre et visible depuis la Banque de Syrie jusqu'au delà de la Poste. Une deuxième faille, sensiblement parallèle, sépare le bloc miocène du bord montagneux crétacé à couches redressées; elle est suivie par le cours inférieur du Fleuve : on voit d'une part, à l'Ouest, sous le

(1) Séance du 15 avril 1946.

Miocène, le contact Aptien-Albien, d'autre part à l'Est, le Cénomanien plongeant fortement vers le Fleuve.

La barrière rocheuse existait vraisemblablement au Pliocène et constituait au début du Quaternaire un îlot en avant de la côte. Elle a été alors, comme la côte, sculptée par l'érosion marine en paliers étagés se terminant au pied de falaises. Le raccord à la terre ferme aurait eu lieu lorsque la mer, dans son retrait progressif, est descendue à la cote $+35^m$, ou immédiatement après.

Puis, tandis que le travail de sculpture se poursuivait dans les tronçons rocheux de la côte, des dunes se sont élevées à partir de la plage sableuse et, chassées vers le NNE, ont gravi en partie la barrière rocheuse jusqu'à atteindre 99^m, pour redescendre au delà jusqu'à la mer. De larges taches de sable ont couvert les paliers d'érosion marine, les cachant plus ou moins, mais sans enlever à la topographie son caractère particulier qui explique qu'en maints endroits, au milieu des maisons, la vue se dégage sur de larges parties de la ville.

Les indices principaux des étapes successives de l'érosion sont :

à la cote 65^m environ : la plateforme doucement inclinée recoupant le Cénomanien redressé à 45°, entre Hadeth et le coude du Fleuve; le lambeau d'alluvion décalcifiée à côté de la savonnerie de Sinn-el-Fil; la plateforme ceinturant la colline de Nazareth.

à la cote 45^m environ : la plateforme recoupant le Cénomanien redressé, à l'Est de Chiyah; le palier ceinturant à l'Ouest la butte de Ras Beyrouth

à la cote 30^m environ : le palier occupé par l'amphitéâtre romain (cote du rocher 28^m).

à la cote 15^m environ : le palier presque continu depuis les rochers de la Grotte aux Pigeons jusqu'au Fleuve.

Parallèlement à ces témoignages des retraits progressifs de la mer au Quaternaire, notons l'importance du développement de grès ramlé aux alentours de la cote 30^m, dans la zone de Bordj el Barajni, Lailaki et du Nahr Rhadir, à 8^{km} au Sud de Beyrouth.

Ces observations confirment celles faites par R. Wetzel et J. Haller dans la région de Tripoli et montrent que de larges tronçons de la côte orientale de la Méditerranée ont été touchés de la même façon par les variations du niveau de la mer au Quaternaire.

CHIMIE VÉGÉTALE. — *Sur l'huile des graines de* Magnolia macrophylla *Michx* (*Magnoliacée*). Note de M. **Victor Plouvier**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Le *Magnolia grandiflora* L. renferme dans ses graines une huile grasse dont l'étude a été faite par Coates et Vick, puis par Brady (¹). Nous avons trouvé de même une huile chez tous les *Magnolia* examinés : *M. acuminata* L., *M. macrophylla* Michx, *M. tripetala* L., *M. parviflora* Sieb. et Zucc., *M. Wilsonii* Rehd., *M. denudata* Desrouss., *M. liliflora* Desrouss., *M. Soulangeana* Soul., *M. Soulangeana* var. *Lennei* Rehd., *M. stellata* Maxim. Cette huile est localisée d'une part dans le tégument externe charnu, d'autre part dans l'amande, ces deux

(¹) Coates et Vick, *Oil and Soap*, 11, 1934, p. 174; Brady, *Journ. Amer. Pharm. Assoc.*, 27, 1938, p. 407.

tissus étant séparés par le tégument interne ligneux. Nous avons pensé que les huiles de ces deux tissus pouvaient être différentes, d'autant plus que le tégument charnu renferme des matières colorantes et une essence.

Nous avons examiné séparément l'huile du tégument et celle de l'amande chez *Magnolia macrophylla*.

A la fin de septembre, des fruits roses, mûrs, pesant en moyenne 105^g donnent 16 % de leur poids de graines. 100^g de graines fraîches ont fourni 24^g de tégument externe sec et 27^g d'amandes sèches avec tégument ligneux. Ces deux parties ont été épuisées séparément par l'éther de pétrole. Les huiles obtenues ont été débarrassées des dernières traces de solvant par 30 minutes de chauffage à 80° dans le vide.

1° *Huile du tégument externe.* — 100^g de tégument sec ont fourni 48^g d'huile rougeâtre, peu fluide, à odeur et saveur d'essence de Magnolia. Après repos de quelques heures, elle laisse déposer des cristaux assez abondants.

Sa densité d_{15}^{15} est 0,9399. Elle se solidifie vers —3°. Elle a pour indice d'iode (Hübl) 100, pour indice de saponification 180; son indice acide est exceptionnellement élevé, 67.

Elle est insoluble dans l'alcool méthylique, soluble dans l'alcool éthylique à 96° à chaud seulement, soluble à froid dans l'alcool propylique et les termes supérieurs. Avec l'acide formique, elle donne une coloration rouge qui brunit à l'ébullition, avec l'acide acétique bouillant, une coloration verte; elle est soluble à froid dans l'acide propionique, et les termes supérieurs sans coloration à chaud. Elle donne la réaction du cholestérol (Liebermann). L'acide nitrique avec vapeurs nitreuses provoque sa solidification, d'où la présence probable d'acide oléique.

Saponifiée quelques jours après sa préparation, cette huile a fourni 9,6 % d'insaponifiable brun, à consistance résineuse, cassante, à faible odeur aromatique; celui-ci donne avec l'acide formique à froid une coloration carmin, avec l'acide acétique bouillant une coloration verte intense; la réaction de Liebermann est positive, mais le stérol n'a pu être isolé. Cet insaponifiable présente en outre un indice d'iode élevé, 117. En prolongeant le chauffage de l'huile avec la solution de potasse alcoolique pendant plusieurs heures, le taux d'insaponifiable diminue sensiblement : il y aurait donc des substances du groupe des résines, difficilement saponifiables. Les acides gras forment une masse cristalline rougeâtre fondant vers +32° (indice d'iode 91, poids moléculaire moyen 285); l'acide palmitique a pu être isolé et identifié (F 62°).

1^g d'huile étalée dans un cristallisoir de 6^{cm} de diamètre ne montre pas de changement net de viscosité et de poids après 4 mois à 10-15° ou après 1 mois à 32°. Cette huile n'est donc pas siccative; elle est cependant très altérable. Elle présente après quelques semaines un dépôt amorphe peu abondant qui ne se redissout pas par chauffage. Après 1 ou 2 mois, surtout si elle reste exposée à l'air, elle ne donne plus qu'une faible coloration avec les acides formique et acétique; son taux d'insaponifiable diminue. Elle se décolore nettement sous

l'action de la lumière. Même conservée au frais, elle ne se dissout plus entièrement à froid dans l'éther de pétrole : il reste un dépôt insoluble rougeâtre, de consistance extractive qui peut atteindre 16 % du poids de l'huile. Saponifié, ce dépôt a laissé 7 % d'insaponifiable duquel nous avons isolé un stérol en cristaux typiques; les acides gras obtenus ont un indice d'iode très diminué (56). La partie qui est restée soluble dans l'éther de pétrole est assez semblable à l'huile primitive, mais son taux d'insaponifiable est tombé à 2 %.

2° *Huile de l'amande.* — 100^g d'amandes pourvues de leur tégument ligneux ont fourni 36^g d'huile. Exprimé pour 100^g d'amandes sèches, sans tégument, ce rendement atteint 63 %.

L'huile obtenue est assez fluide, d'un jaune légèrement brun, sans odeur nette, sans saveur sensible d'essence de *Magnolia*. Laissée à 0°, elle ne se prend pas en masse et ne cristallise pas.

Sa densité d_{15}^{15} est 0,923. Elle se congèle vers —9°. Elle a pour indice de réfraction (réfractomètre Féry) n_D^{12} 1,474, pour indice d'iode 123, pour indice acide 16,2, pour indice de saponification 198. Elle a les mêmes solubilités que l'huile du tégument mais ne donne pas de coloration avec les acides formique et acétique, la réaction de Liebermann est peu sensible.

Saponifiée cette huile laisse seulement 0,72 % d'insaponifiable incolore donnant la réaction de Liebermann; le stérol a été observé en cristaux typiques. Les acides gras forment une masse cristalline jaunâtre fondant vers 32° (indice d'iode 128, poids moléculaire moyen 280, acide palmitique isolé et identifié).

L'huile d'amande n'est pas altérable comme celle du tégument : après 2 mois elle ne présente qu'un très léger dépôt marron; elle reste immédiatement et totalement soluble à froid dans l'éther de pétrole. 1^g d'huile étalée dans un cristallisoir ne change guère de viscosité ni de poids après 3 mois à la température ordinaire; à 32°, en moins de 15 jours, elle se solidifie et son poids augmente de 0^g,05; elle se différencie donc de l'huile du tégument par ses propriétés siccatives.

En résumé, les deux huiles étudiées sont nettement différentes, bien qu'elles appartiennent au même organe : les faits aberrants constatés pour l'huile du tégument peuvent être en relation avec l'existence d'essence dont l'oxydation serait à l'origine des substances résinoïdes.

BACTÉRIOLOGIE. — *La pourriture visqueuse de la Betterave gelée : l'agent producteur de la fructosane,* Phytomonas betæ-gelatæ, *n. sp.* Note [1] de Mlle **Berthe Delaporte** et M. **Henri Belval**, présentée par M. Joseph Magrou.

Les betteraves tuées par le froid deviennent lors du dégel la proie de diverses

[1] Séance du 8 avril 1946.

bactéries qui, aux dépens du saccharose, élaborent les unes de la dextrane, les autres de la fructosane ([2]). Parmi ces dernières nous avons isolé une espèce dont nous donnons ci-après les principales caractéristiques.

Cultivée sur gélose, cette Bactérie se présente sous la forme de petits bâtonnets courts, mesurant $0^{\mu},6 \times 1,7$ à $2^{\mu},5$, hyalins, isolés, très mobiles. Le bleu de méthylène la colore tantôt uniformément, tantôt d'une façon plus intense aux extrémités, par suite de la condensation bipolaire du cytoplasme; en outre on observe souvent un corpuscule métachromatique coloré alors en rouge. Elle ne prend pas le Gram. Elle contient parfois du glycogène, mais seulement en petite quantité et à l'état diffus dans le cytoplasme (culture de 24 heures). On n'a jamais observé de spores.

Les cils sont attachés par un ou deux, rarement trois, à un pôle et exceptionnellement aux deux pôles.

Cette Bactérie est aérobie stricte (poussant exclusivement à la surface de la gélose profonde).

Sur gélose ordinaire (bouillon de viande peptoné) à 25°, les colonies sont petites, rondes, à bords nets, lisses, brillantes, atteignant 2 à 3^{mm} de diamètre au bout de trois jours. En tube incliné la culture est assez mince, lisse, brillante, blanche mais translucide, et possède une teinte orange par transparence; elle n'est pas envahissante.

Sur gélose au bouillon de haricot peptoné à 0,2 % et saccharosé à 2 %, en boîte de Petri, les colonies en surface sont rondes, très bombées, lisses, homogènes, brillantes, vitreuses, de transparence translucide ou mi-opaque; les colonies développées à l'intérieur de la gélose sont lenticulaires, à bords minces; formant beaucoup de gaz, elles font craquer la gélose. Sur ce même milieu, en tube incliné, la culture est très épaisse, crémeuse, lisse, brillante, très coulante, plutôt opaque; il y a également production de gaz.

En gélose profonde VF glucosée à 2 ‰, répartie en tubes de 8^{mm}, il apparaît, dans la partie supérieure du tube, après 24 heures, un pigment jaune verdâtre fluorescent qui diffuse lentement.

Le bouillon de viande ordinaire, ensemencé et mis à l'étuve à 25°, se trouble en 24 heures; il se forme un léger dépôt qui augmente peu à peu; vers le 8e jour apparaît un voile léger qui tombe et vers le 11e jour le trouble est devenu intense.

La gélatine, ensemencée par piqûre et conservée à 18°, montre en 24 heures de nombreuses bulles de gaz lenticulaires le long de la piqûre; ces bulles grandissent pendant les jours suivants, s'unissent et arrivent à n'en plus former qu'une seule qui disparaît. La liquéfaction débute au 8e jour en forme de coupe, puis elle se produit tout le long de la piqûre; au bout de 15 jours, les 2/3 de la gélatine sont liquéfiés; la liquéfaction est totale vers le 23e jour.

Le lait coagule au 11e jour, le sérum exsude, le pH est alors voisin de 6; il

---

([2]) H. Belval, *Comptes rendus*, **218**, 1944, p. 854; H. Belval et B. Delaporte, *ibid.*, **221**, 1945, p. 592.

remonte à 7 après 1 mois et à 8 après 4 mois. Pendant ce temps l'exsudation du sérum s'accentue; après 1 mois et demi le sérum paraît filant; la peptonisation du caillot est tardive; elle n'est complète qu'au bout de 4 mois.

La Bactérie ne produit ni indol ni hydrogène sulfuré. Elle réduit les nitrates en nitrites; la réaction est encore plus fortement positive au 6e jour que sur les jeunes cultures. Elle forme de l'acétylméthylcarbinol et non du 2.3-butylène-glycol. La réaction de la catalase est positive.

Elle n'est pas protéolytique; elle peut assimiler l'azote minéral en présence de saccharose.

Cette Bactérie ne pousse que très peu sur tranche de pomme de terre et guère mieux sur topinambour à l'époque de la maturité, quand le tubercule contient surtout de l'inuline; le résultat est meilleur à la fin de la période de repos, quand l'inuline s'est partiellement transformée en saccharose. Elle pousse très bien sur carotte et mieux encore sur betterave où les cultures sont luxuriantes : visqueuses, translucides, très coulantes et formant même parfois de grosses masses gélatineuses au fond des tubes. En aucun cas il n'y a de développement sur les tissus vivants.

L'utilisation des glucides en milieu liquide est variable : ou bien il y a production pure et simple de gaz et d'acide, le milieu restant parfaitement fluide; ainsi en est-il avec l'arabinose, le glucose, le galactose, le mannose, le fructose sous sa forme stable fructo-pyranose, le lactose, le maltose; ou bien il y a, outre la production de gaz et d'acide, formation d'une substance (fructosane) qui rend le milieu visqueux, ce qui arrive avec tous les holosides possédant une molécule de fructo-furanose en fin de chaîne, saccharose, raffinose, gentianose, stachyose et verbascose. Les osanes, telles que l'amidon, l'inuline, la graminine demeurent intactes. Parmi les polyols la mannite est utilisée; avec la dulcite, il y a production de gaz sans que le pH soit abaissé. Le glycérol est encore moins touché.

Outre le CO_2 la Bactérie produit de l'acide lactique et un peu d'acide acétique.

La Bactérie se développe bien à la température du laboratoire et à 25°, mais à 30° elle pousse difficilement et l'on ne trouve dans ces conditions, au bout de deux jours, que des formes d'involution.

Nous conclurons que nous avons affaire à une espèce nouvelle, non pathogène au sens propre du mot, puisqu'elle n'envahit que des tissus tués par le froid ou la chaleur; nous proposons de la nommer *Phytomonas betæ-gelatæ*.

IMMUNOLOGIE. — *Sur les méthodes physiques mettant en évidence les anticorps formés par les molécules organiques de faible poids moléculaire.* Note (1) de M. **Jean Loiseleur** et Mlle **Lise Jacob**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

I. Les anticorps formés par les molécules organiques de faible poids molé-

(1) Séance du 8 avril 1946.

culaire [2] ne peuvent pas être mis en évidence par la floculation des mélanges du sérum et de l'antigène; la floculation correspond en effet à la diminution de la solubilité de la combinaison de l'antigène et de l'anticorps, c'est-à-dire à un abaissement suffisant du rapport charge électrique/volume moléculaire, condition qui ne peut pas être remplie par ces antigènes de faible volume moléculaire et de forte densité électrique superficielle.

Or on peut remarquer que, avant la floculation, il se produit l'orientation de l'antigène vers l'anticorps et leur accolement, d'où, pour ces molécules, une diminution du degré de liberté et, pour le milieu, un état de tension interne entraînant des modifications caractéristiques de la viscosité et de la réfraction. On dispose ainsi d'un procédé pour déceler ces anticorps.

II. En introduisant des quantités croissantes d'un antigène *quelconque* dans un sérum *quelconque*, tout se passe comme si les molécules d'antigène se distribuaient au hasard en superposant leurs propriétés à celles du sérum [3]. On peut seulement constater, dans ces essais successifs, le reflet plus ou moins marqué des propriétés de l'antigène introduit, pour une quantité minime, la viscosité et l'indice réfractométrique restent pratiquement inchangés.

II. Il n'en est plus de même si le sérum contient un anticorps spécifique de l'antigène. La viscosité présente, comme il a été exposé dans une Note antérieure, une augmentation localisée dans un certain domaine de concentrations et atteignant son maximum dans la zone d'équivalence. Parallèlement l'indice réfractométrique est abaissé, puisque l'additivité des indices est perturbée pour les molécules entrées en combinaison. Les variations de l'indice réfractométrique sont symétriques de celles de la viscosité et le minimum de l'indice coïncide avec le maximum de viscosité. Les mesures ont été faites avec le réfractomètre interférentiel de Jonnard [4]. La courbe 1 reproduit simultanément les épreuves de viscosité (en pointillé) et l'indice réfractométrique (en trait plein) sur le sérum d'un lapin (2,550 K.) préparé, pendant 8 jours, avec une dose totale de 480^{mg} d'arginine, administrée en 14 injections intramusculaires. Avant le traitement l'addition d'arginine au sérum n'entraîne aucune perturbation de la viscosité ni de son indice de réfraction. Au contraire, le lendemain de la dernière injection, on constate : 1° pour la viscosité, l'allure de courbe en cloche caractéristique de la zone d'équivalence; 2° pour l'indice réfractométrique, une chute dont le minimum coïncide avec le maximum de la courbe de viscosité. L'amplitude de la variation de l'indice correspond à 2 % environ de la valeur initiale; elle intéresse la 5e décimale, l'exactitude de la mesure

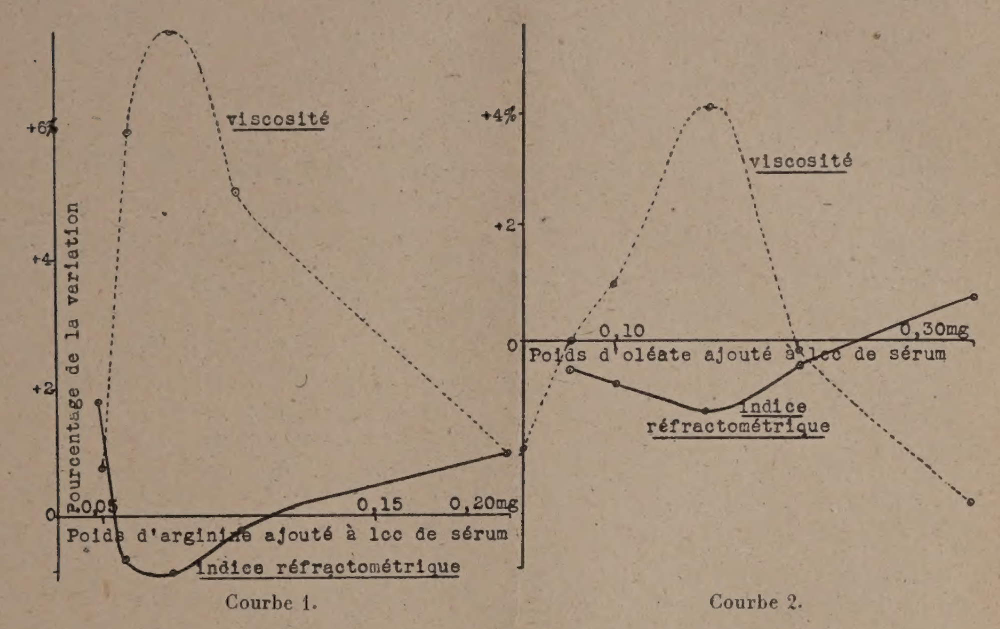
---

(2) J. LOISELEUR, *Comptes rendus*, **222**, 1946, pp. 159 et 461.

(3) Dans toutes ces expériences, on s'arrange pour opérer sur des volumes constants, en préparant une série de mélanges, composés respectivement de 2^{cm^3} de sérum et de $0^{cm^3},5$ de sérum physiologique contenant en solution (à pH 7,4) 0, 0,05, 0,1, 0,25 ou $0^{mg},5$ de l'antigène considéré.

(4) Cet appareil possède l'avantage d'une égalisation rapide de la température des deux cuves de mesure.

étant de $\pm 1,5.10^{-6}$. Les variations de la réfraction sont ainsi numériquement plus faibles que celles de la viscosité, mais elles constituent, pour cette dernière, un complément important grâce à la concordance des indications données par les deux méthodes.



Courbe 1. Courbe 2.

La courbe 2 est relative à une expérience identique (animal préparé, pendant 8 jours, par 30^{mg} d'oléate de Na, administrés en 29 injections). Des résultats analogues sont présentés par des animaux préparés avec différents antigènes (xylose, leucine, phénol, aniline). Avec un lapin préparé à l'acide *d*-tartrique; la mesure de l'indice réfractométrique permet de retrouver la même spécificité que celle que présentent les courbes de viscosité; dans la zone d'équivalence, la chute de l'indice est plus marquée avec l'acide droit qu'avec les acides racémique et gauche, la courbe du racémique s'intercalant entre celles des acides droit et gauche.

En résumé les mesures de la viscosité et de l'indice réfractométrique mettent en évidence les anticorps formés par les molécules organiques de faible poids moléculaire. Elles apportent la preuve directe que, dans le sérum d'un animal préparé, la distribution de l'antigène ne se fait plus au hasard, cette adaptation spécifique du sérum constituant la définition de l'anticorps.

HÉRÉDITÉ PATHOLOGIQUE. — *Sur une anomalie de l'oreille externe chez la Souris. Influence de l'âge de la mère sur la fréquence d'apparition de l'anomalie.* Note [1] de M. **Nicolas Kobozieff** et Mme **N. A. Pomriaskinsky-Kobozieff**, présentée par M. Maurice Caullery.

Dans plusieurs Notes nous avons montré que notre mutation auriculaire

(1) Séance du 25 mars 1946.

est récessive (récessivité d'ailleurs incomplète), d'un phénotype très variable quant à sa localisation et à son degré d'extériorisation. Les différentes formes de l'anomalie présentent certaines différences génotypiques. En ce qui concerne la répartition suivant les sexes, on observe un excédent notable de mâles sur les femelles dans la proportion de 2 ♂ : 1 ♀. Il s'agit donc d'une mutation récessive incomplète accompagnée de *limitation relative des sexes* ([2]).

Nous avons jugé utile de rechercher l'influence de l'âge de la mère sur la fréquence d'aggravation de l'anomalie. Pour résoudre ce problème, nous avons procédé à des croisements d'animaux anormaux, ayant le même degré d'extériorisation, par exemple des progéniteurs à oreille tronquée, dont la troncature était autant que possible identique. A cet effet nous avons choisi 20 femelles et 10 mâles. Certaines femelles ont donné, durant leur vie sexuelle, jusqu'à 5 portées. Notre étude a porté sur 341 descendants, dont 105 anormaux, c'est-à-dire une proportion 30,79 %. Nous avons réparti les descendants en quatre groupes, selon l'âge de la mère au moment de la mise bas (voir le tableau).

	Portées issues de mères âgées de :			
	2 mois 1/2 à 5 mois 1/2.	5 mois 1/2 à 8 mois 1/2.	8 mois 1/2 à 11 mois 1/2.	11 mois 1/2 à 14 mois 1/2
Numéro du groupe ([1])	I.	II.	III.	IV.
Nombre total de descendants	143	81	91	26
» de descendants anormaux	52	23	24	6
% par rapport au nombre total	36,36	28,40	26,31	23,08
Nombre de descendants normaux	91	58	67	20
» de portées	30	18	19	5
» moyen de petits par portée	4,8	4,5	4,8	5,2

Ce tableau montre que l'âge de la mère au moment de la mise bas joue un rôle certain. En effet les femelles du groupe I, c'est-à-dire les plus jeunes, donnent le maximum d'anormaux (36,36 %). Les femelles des groupes II, III, IV, comprenant des portées issues de mères de plus en plus âgées, fournissent respectivement 28,40 %, 26,31 % et 23,08 %, soit de moins en moins.

Nos résultats sont superposables à ceux de Wright ([3]), qui a travaillé sur la polydactylie chez le Cobaye. Il a trouvé également que ce sont les femelles les plus jeunes qui donnent le maximum de descendants anormaux.

En définitive, la fréquence d'apparition de l'anomalie est en fonction inverse de l'âge de la mère au moment de la mise bas.

La séance est levée à $15^h 25^m$. L. B.

([2]) *Bull. Mus. Hist. Nat.*, 2e série, **10**, 1, 1937; *Proc. VII, Congr. Genetics*, Edinburgh, 1939; *C. R. Soc. Biol.*, **133**, 1940, p. 366; **139**, 1945, pp. 243, 245, 305; *Comptes rendus*, **222**, 1946, p. 937.

([3]) *Genetics*, **20**, p. 84.